



KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI
REPUBLIK INDONESIA
2023

Panduan Guru Matematika

Edisi Revisi

Dicky Susanto, dkk

SMA/MA/SMK/MAK Kelas X

Hak Cipta pada Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi Republik Indonesia
Dilindungi Undang-Undang

Penafian: Buku ini disiapkan oleh Pemerintah dalam rangka pemenuhan kebutuhan buku pendidikan yang bermutu, murah, dan merata sesuai dengan amanat dalam UU No. 3 Tahun 2017. Buku ini disusun dan ditelaah oleh berbagai pihak di bawah koordinasi Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi. Buku ini merupakan dokumen hidup yang senantiasa diperbaiki, diperbarui, dan dimutakhirkan sesuai dengan dinamika kebutuhan dan perubahan zaman. Masukan dari berbagai kalangan yang di-alamatkan kepada penulis atau melalui alamat surel buku@kemdikbud.go.id diharapkan dapat meningkatkan kualitas buku ini.

Panduan Guru Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas X (Edisi Revisi)

Penulis

Dicky Susanto
Theja Kurniawan
Savitri K. Sihombing
Eunice Salim
Marianna Magdalena Radjawane
Ummy Salmah
Ambarsari Kusuma Wardani

Penelaah

Sunardi
Azhary Masta

Penyelia/Penyelarass

Supriyatno
Lenny Puspita Ekawaty
Maharani Prananingrum

Kontributor

Iman Santoso
Ali Murtandho

Ilustrator

Faris M. Naufal
M. Firdaus Jubaedi

Editor

Tri Hartini
Maharani Prananingrum

Editor Visual

Is Yuniarto Nafawi

Desainer

M. Firdaus Jubaedi

Penerbit

Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Dikeluarkan oleh
Pusat Perbukuan Kompleks Kemdikbudristek
Jalan RS. Fatmawati, Cipete, Jakarta Selatan
<https://buku.kemdikbud.go.id>

Edisi Revisi, 2023

ISBN 978-623-118-561-7 (no.jil.lengkap PDF)
ISBN 978-623-118-562-4 (jil.1 PDF)

Isi buku ini menggunakan huruf Noto Serif 10/12 pt., SIL Open Font License.
viii, 312 hlm.: 17,6 × 25 cm

Kata Pengantar

Pusat Perbukuan; Badan Standar, Kurikulum, dan Asesmen Pendidikan; Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi memiliki tugas dan fungsi mengembangkan buku pendidikan pada satuan Pendidikan Anak Usia Dini, Pendidikan Dasar, dan Pendidikan Menengah, termasuk Pendidikan Khusus. Buku berkaitan erat dengan kurikulum. Buku yang dikembangkan saat ini mengacu pada kurikulum yang berlaku, yaitu Kurikulum Merdeka.

Salah satu bentuk dukungan terhadap implementasi Kurikulum Merdeka di satuan pendidikan ialah mengembangkan buku teks utama yang terdiri atas buku siswa dan panduan guru. Buku ini merupakan sumber belajar utama dalam pembelajaran bagi siswa dan menjadi salah satu referensi atau inspirasi bagi guru dalam merancang dan mengembangkan pembelajaran sesuai karakteristik, potensi, dan kebutuhan peserta didik. Keberadaan buku teks utama ini diharapkan menjadi fondasi dalam membentuk Profil Pelajar Pancasila yang beriman dan bertakwa kepada Tuhan yang Maha Esa, dan berakhlak mulia; berkebinekaan global, berjiwa gotong royong, mandiri, kritis, dan kreatif.

Buku teks utama, sebagai salah satu sarana membangun dan meningkatkan budaya literasi masyarakat Indonesia, perlu mendapatkan perhatian khusus. Pemerintah perlu menyiapkan buku teks utama yang mengikuti perkembangan zaman untuk semua mata pelajaran wajib dan mata pelajaran peminatan, termasuk Pendidikan Khusus. Sehubungan dengan hal itu, Pusat Perbukuan merevisi dan menerbitkan buku-buku teks utama berdasarkan Capaian Pembelajaran dalam Kurikulum Merdeka edisi terbaru.

Kami mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah berkolaborasi dalam upaya menghadirkan buku teks utama ini. Kami berharap buku ini dapat menjadi landasan dalam memperkuat ketahanan budaya bangsa, membentuk mentalitas maju, modern, dan berkarakter bagi seluruh generasi penerus. Semoga buku teks utama ini dapat menjadi tonggak perubahan yang menginspirasi, membimbing, dan mengangkat kualitas pendidikan kita ke puncak keunggulan.

Jakarta, Desember 2023
Kepala Pusat Perbukuan,

Supriyatno, S.Pd., M.A.

Prakata

Puji syukur kami panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa atas berkat dan rahmatNya dalam menyelesaikan penulisan buku panduan guru ini. Buku ini disusun sebagai pedoman bagi guru yang menggunakan buku siswa berdasarkan Capaian Pembelajaran Matematika Fase E Kurikulum Merdeka. Buku ini adalah edisi revisi menyesuaikan dengan perubahan pada Capaian Pembelajaran.

Bagi para peserta didik, matematika sering kali dianggap pelajaran yang abstrak, sulit, dan kurang relevan dalam kehidupan. Padahal pada hakikatnya, banyak konsep dan prinsip matematika justru muncul di alam dan dekat dengan kehidupan sehari-hari. Harapan kami, buku ini dapat membimbing para guru menjadi agen pengubah mispersepsi mengenai matematika dengan menggunakan pendekatan yang lebih kontekstual melalui permasalahan kehidupan nyata dan melibatkan siswa secara aktif dalam bereksplorasi dengan pertanyaan penuntun.

Sebagian besar pembelajaran matematika dalam buku siswa juga diupayakan menarik perhatian dan minat siswa sehingga “tidak merasa sedang belajar matematika”. Buku ini akan memberikan panduan bagi guru dalam mengajak siswa untuk berpikir kritis dan kreatif untuk mengembangkan keterampilan berpikir aras tinggi (HOTS). Selain itu, di banyak kesempatan guru juga akan diberikan langkah-langkah dalam menerapkan berdiskusi, komunikasi, kegiatan kerja sama, dan menggunakan penggunaan teknologi dalam menyelesaikan permasalahan sehingga siswa diasah kemampuannya sesuai dengan Profil Pelajar Pancasila dan keterampilan abad ke-21. Pada bagian panduan umum buku, guru juga akan mendapatkan penjabaran rinci mengenai perubahan kurikulum, pendekatan pembelajaran, sistem penilaian, serta elemen-elemen esensial lainnya yang terkandung dalam buku siswa. Bagian ini diharapkan dapat memberikan bekal bagi para guru saat mengimplementasikan pendekatan pembelajaran yang sesuai dengan buku siswa.

Akhir kata, kami berharap buku ini dapat mendukung guru dalam melaksanakan pembelajaran matematika Fase E yang efektif dan kontekstual, dan semakin banyak siswa yang mulai menyenangi matematika dan merasakan manfaat belajar matematika.

Selamat menabur benih kesukaan bermatematika!

Jakarta, Desember 2023

Tim Penulis

Daftar Isi

| | |
|--|------------|
| Kata Pengantar | iii |
| Prakata | iv |
| Daftar Isi | v |
| Daftar Gambar | viii |
| Daftar Tabel | ix |
| Panduan Umum | 1 |
| A. Pendahuluan | 2 |
| B. Capaian Pembelajaran..... | 6 |
| C. Strategi Umum Pembelajaran..... | 10 |
| D. Alternatif Pembelajaran..... | 11 |
| E. Asesmen | 14 |
| F. Kegiatan Tindak Lanjut..... | 14 |
| G. Interaksi Guru dengan Orang Tua..... | 15 |
| H. Penjelasan Bagian-Bagian Buku Siswa..... | 16 |
| I. Skema Pembelajaran | 21 |
| Bab 1 Eksponen | 29 |
| A. Definisi Eksponen | 32 |
| B. Sifat-Sifat Eksponen | 35 |
| C. Fungsi Eksponensial..... | 39 |
| D. Bentuk Akar..... | 50 |
| BAb 2 Barisan dan Deret | 63 |
| A. Barisan..... | 67 |
| B. Deret..... | 79 |
| C. Bunga | 94 |
| BAb 3 Perbandingan Trigonometri | 103 |
| A. Perbandingan Trigonometri | 107 |
| B. Pemanfaatan Perbandingan Trigonometri | 116 |

| | |
|---|------------|
| Bab 4 Sistem Persamaan dan Pertidaksamaan Linear | 125 |
| A. Sistem Persamaan Linear | 128 |
| B. Sistem Pertidaksamaan Linear..... | 138 |
| Bab 5 Persamaan dan Fungsi Kuadrat | 149 |
| A. Persamaan Kuadrat | 153 |
| B. Fungsi Kuadrat | 173 |
| Bab 6 Representasi dan Interpretasi Data | 199 |
| A. Representasi Data | 203 |
| B. Statistik Deskriptif | 213 |
| C. Representasi Data Lanjutan | 226 |
| Bab 7 Peluang | 243 |
| A. Distribusi Peluang..... | 247 |
| B. Aturan Penjumlahan..... | 260 |
| C. Aturan Perkalian..... | 270 |
| Glosarium | 287 |
| Daftar Pustaka | 289 |
| Daftar Sumber Gambar | 291 |
| Indeks..... | 292 |
| Biodata Pelaku Perbukuan | 294 |
| Biodata Penulis..... | 294 |
| Biodata Penelaah | 305 |
| Biodata Ilustrator | 308 |
| Biodata Penyunting Naskah 1..... | 309 |
| Biodata Penyunting Naskah 2..... | 310 |
| Biodata Editor Visual..... | 311 |
| Biodata Penata Letak (Desainer)..... | 312 |

Daftar Gambar

| | | |
|------------|--|-----|
| Gambar 1 | Tangkapan Layar GeoGebra (2023) | 13 |
| Gambar 2 | Tangkapan Layar Desmos (2023) | 13 |
| Gambar 2.1 | Kertas Dilipat Satu Kali | 73 |
| Gambar 2.2 | Cara memotong kertas persegi panjang menjadi persegi . | 85 |
| Gambar 3.6 | Segitiga Sebangun 1 | 106 |
| Gambar 3.7 | Segitiga Sebangun 2 | 106 |
| Gambar 4.1 | Grafik Sistem Persamaan Linear Permasalahan Harga Pensil dan Buku | 129 |

Daftar Tabel

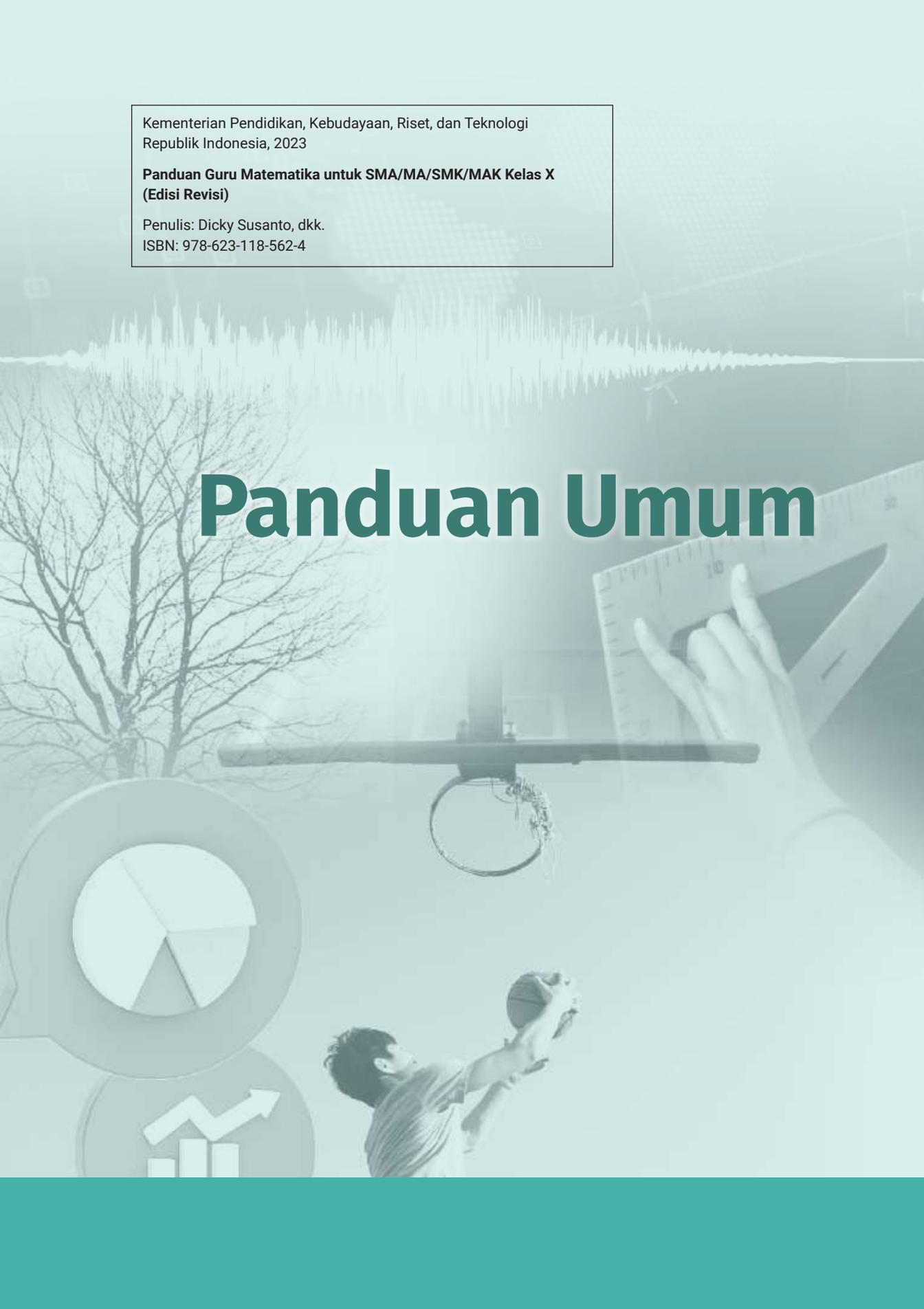
| | | |
|-----------|--|----|
| Tabel 1. | Pemetaan Dimensi Profil Pelajar Pancasila dan Aktivitas Pembelajaran | 3 |
| Tabel 2. | Capaian Pembelajaran Setiap Elemen Mata Pelajaran Matematika Fase E | 6 |
| Tabel 3. | Alur Tujuan Pembelajaran Matematika Fase E..... | 8 |
| Tabel 2.2 | Jumlah Lipatan Kertas dan Bagian Sama Besar yang Terbentuk | 74 |
| Tabel 2.3 | Banyak Jabat Tangan yang Terjadi di Kelas | 81 |
| Tabel 2.4 | Proses Menemukan Kembali Rumus Jumlah Deret Geometri | 82 |

Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Republik Indonesia, 2023

**Panduan Guru Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas X
(Edisi Revisi)**

Penulis: Dicky Susanto, dkk.
ISBN: 978-623-118-562-4

Panduan Umum



A. Pendahuluan

1. Latar Belakang dan Tujuan

Peraturan Pemerintah RI Nomor 75 Tahun 2019 menetapkan bahwa Buku Teks Utama terdiri atas Buku Siswa dan Buku Panduan Guru. Buku Panduan Guru Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas X (Edisi Revisi) ini memiliki tiga fungsi utama. Pertama, Buku Panduan Guru digunakan sebagai petunjuk penggunaan Buku Siswa Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas X (Edisi Revisi). Sebelum melakukan kegiatan pembelajaran dengan Buku Siswa, guru dapat mempelajari terlebih dahulu panduan yang ada pada Buku Panduan Guru. Buku Panduan Guru ini memuat penjelasan-penjelasan setiap bagian dari Buku Siswa sehingga memberikan arahan kepada guru agar kegiatan pembelajaran berjalan sesuai dengan tujuan yang diharapkan.

Kedua, Buku Panduan Guru digunakan sebagai acuan kegiatan pembelajaran di kelas. Pada Buku Panduan terdapat penjabaran mengenai tujuan pembelajaran yang akan dicapai dari setiap bab, langkah-langkah kegiatan pembelajaran, ide-ide kegiatan pembelajaran bagi peserta didik dengan kemampuan yang berbeda di kelas, serta alternatif penyelesaian dari instrumen penilaian. Dengan demikian, buku ini dapat membantu memudahkan guru untuk menentukan aktivitas pembelajaran guna mencapai tujuan pembelajaran yang diinginkan.

Ketiga, Buku Panduan Guru digunakan untuk memberikan gambaran mengenai metode atau pendekatan pembelajaran yang dapat diterapkan pada proses pembelajaran di kelas. Pada Buku Siswa, setiap materi pada semua bab diawali dengan konteks yang diangkat dari kehidupan nyata. Materi yang ada pada Buku Siswa juga disajikan dengan berbagai kegiatan eksplorasi yang dapat menuntun peserta didik dalam memahami konsep yang disajikan sehingga pada Buku Panduan Guru diberikan alternatif metode pembelajaran yang dapat digunakan seperti diskusi dan tanya jawab. Selain itu, diberikan pula alternatif pendekatan pembelajaran yang dapat diterapkan di kelas seperti pendekatan kontekstual dan penemuan terbimbing.

Guru juga diharapkan dapat mengembangkan metode dan pendekatan pembelajaran yang menekankan pada kecakapan abad ke-21. Untuk itu, guru

dapat menggali lebih dalam kemampuan berpikir kritis, kreativitas, kerja sama, dan kemampuan berkomunikasi peserta didik berdasarkan kegiatan pembelajaran yang terdapat pada Buku Siswa. Implementasi kecakapan abad ke-21 pada pembelajaran juga erat kaitannya dengan memacu peserta didik untuk memiliki keterampilan berpikir sederhana (LOTS) hingga keterampilan berpikir tingkat tinggi (HOTS). Dengan demikian, guru diharapkan dapat memberi ruang, kesempatan, dan pengalaman belajar yang melatih peserta didik tidak hanya keterampilan berpikir sederhana, tetapi juga keterampilan berpikir tingkat tinggi.

2. Profil Pelajar Pancasila

Tujuan pendidikan nasional diterjemahkan dalam bentuk Profil Pelajar Pancasila. Profil Pelajar Pancasila adalah perwujudan pelajar Indonesia sebagai pelajar sepanjang hayat yang memiliki kompetensi global dan berperilaku sesuai dengan nilai-nilai Pancasila, dengan enam ciri utama yaitu: 1) beriman, bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa, dan berakhlak mulia, 2) mandiri, 3) bergotong-royong, 4) berkebinekaan global, 5) bernalar kritis, dan 6) kreatif. Beberapa ikon pada Buku Siswa dibuat dengan berorientasi pada Profil Pelajar Pancasila seperti **Ayo, Berpikir Kritis** dan **Ayo, Berpikir Kreatif**. Pada Buku Panduan Guru diberikan uraian dari ikon tersebut yang dapat menuntun guru mengembangkan Profil Pelajar Pancasila dari dalam diri peserta didik. Aktivitas pembelajaran dirancang tidak hanya untuk mencapai tujuan pembelajaran, namun juga diarahkan untuk mengembangkan dimensi Profil Pelajar Pancasila. Pemetaan aktivitas pembelajaran dan dimensi Profil Pelajar Pancasila, disajikan dalam tabel berikut.

Tabel 1. Pemetaan Dimensi Profil Pelajar Pancasila dan Aktivitas Pembelajaran

| Dimensi | Elemen | Subelemen | Implementasi |
|---|----------------|------------|----------------|
| Beriman, bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa, dan berakhlak mulia | Akhlak pribadi | Integritas | Eksplorasi 1.1 |

| Dimensi | Elemen | Subelemen | Implementasi |
|-----------------|---|---|---|
| Gotong royong | Kolaborasi | Kerja sama | Eksplorasi 1.2 Eksplorasi 2.1 Eksplorasi 2.5 Eksplorasi 3.1 |
| | | Komunikasi untuk mencapai tujuan bersama | Eksplorasi 2.7 Eksplorasi 8.2 |
| Mandiri | Pemahaman diri dan situasi yang dihadapi | Mengembangkan refleksi diri | Semua bagian Ayo, Berefleksi |
| | Regulasi Diri | Menunjukkan inisiatif dan bekerja secara mandiri | Semua Latihan |
| | | Mengembangkan pengendalian dan disiplin diri | Semua Latihan |
| Bernalar kritis | Memperoleh dan memproses informasi dan gagasan | Mengajukan pertanyaan | Eksplorasi 1.3 Eksplorasi 5.6 |
| | | Mengidentifikasi, mengklarifikasi, dan mengolah informasi dan gagasan | Eksplorasi 2.6 Eksplorasi 2.8 Eksplorasi 2.9 Eksplorasi 5.1 |
| | Menganalisis dan mengevaluasi penalaran dan prosedurnya | Menganalisis dan mengevaluasi penalaran dan prosedurnya | Eksplorasi 2.2 Eksplorasi 2.3 Eksplorasi 2.4 Eksplorasi 4.1 Eksplorasi 4.2 Eksplorasi 4.3 Eksplorasi 5.2 Eksplorasi 5.3 Eksplorasi 5.4 Eksplorasi 5.7 Eksplorasi 5.8 Eksplorasi 5.9 Eksplorasi 5.10 Eksplorasi 6.1 |

| Dimensi | Elemen | Subelemen | Implementasi |
|---------|--|--|--|
| | | | Eksplorasi 6.2 Eksplorasi 6.3 Eksplorasi 6.4 Eksplorasi 6.5 Eksplorasi 6.6 Eksplorasi 7.1 |
| | Refleksi pemikiran dan proses berpikir | Merefleksi dan mengevaluasi pemikirannya sendiri | Eksplorasi 5.5 |
| Kreatif | Memiliki keluwesan berpikir dalam mencari alternatif solusi permasalahan | | Materi Pengayaan |

Dengan berpedoman pada Buku Panduan Guru dalam menyampaikan materi yang ada dalam Buku Siswa, tentu saja pada akhirnya peserta didik diharapkan dapat memenuhi capaian pembelajaran yang diharapkan. Peserta didik diharapkan dapat memahami konsep terkait eksponen, barisan dan deret, trigonometri, sistem persamaan dan pertidaksamaan linear, persamaan dan fungsi kuadrat, representasi dan interpretasi data, serta peluang.

3. Karakteristik Mata Pelajaran Matematika

Mata Pelajaran Matematika diorganisasikan dalam lingkup lima elemen konten (dengan tambahan 1 elemen sebagai pilihan untuk kelas XI dan XII) dan lima elemen proses.

Karakteristik Mata Pelajaran Matematika dapat diakses pada tautan:

<https://buku.kemdikbud.go.id/s/zggvac>



B. Capaian Pembelajaran

1. Capaian Pembelajaran Matematika Fase E

Pada akhir fase E, peserta didik dapat menggeneralisasi sifat-sifat operasi bilangan berpangkat (eksponen), serta menggunakan barisan dan deret (aritmetika dan geometri) dalam bunga tunggal dan bunga majemuk. Mereka dapat menggunakan sistem persamaan linear tiga variabel, sistem pertidaksamaan linear dua variabel, persamaan dan fungsi kuadrat serta persamaan dan fungsi eksponensial dalam menyelesaikan masalah. Mereka dapat menentukan perbandingan trigonometri dan memecahkan masalah yang melibatkan perbandingan trigonometri dan memecahkan masalah yang melibatkan segitiga siku-siku. Mereka juga dapat menginterpretasi dan membandingkan himpunan data berdasarkan distribusi data, menggunakan diagram pencar untuk menyelidiki hubungan data numerik, dan mengevaluasi laporan berbasis statistika. Mereka dapat menjelaskan peluang dan menentukan frekuensi harapan dari kejadian majemuk, serta konsep dari kejadian saling bebas dan saling lepas. Capaian Pembelajaran setiap elemen mata pelajaran Matematika ialah sebagai berikut.

Tabel 2. Capaian Pembelajaran Setiap Elemen Mata Pelajaran Matematika Fase E

| Elemen | Capaian Pembelajaran |
|--------------------|--|
| Bilangan | Di akhir fase E, peserta didik dapat menggeneralisasi sifat-sifat bilangan berpangkat (termasuk bilangan pangkat pecahan). Mereka dapat menerapkan barisan dan deret aritmetika dan geometri, termasuk masalah yang terkait bunga tunggal dan bunga majemuk. |
| Aljabar dan Fungsi | Di akhir fase E, peserta didik dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan sistem persamaan linear tiga variabel dan sistem pertidaksamaan linear dua variabel. Mereka dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan persamaan dan fungsi kuadrat (termasuk akar imajiner), serta persamaan eksponensial (berbasis/bilangan pokok sama) dan fungsi eksponensial. |

| Elemen | Capaian Pembelajaran |
|---------------------------|---|
| Pengukuran | - |
| Geometri | Di akhir fase E, peserta didik dapat menyelesaikan permasalahan segitiga siku-siku yang melibatkan perbandingan trigonometri dan aplikasinya. |
| Analisis Data dan Peluang | Di akhir fase E, peserta didik dapat merepresentasikan dan menginterpretasi data dengan cara menentukan jangkauan kuartil dan interkuartil. Mereka dapat membuat dan menginterpretasi Diagram Box Plot (Box-and-Whisker Plot) dan menggunakannya untuk membandingkan himpunan data. Mereka dapat menentukan dan menggunakan box plot, histogram, dan dot plot sesuai dengan natur (karakteristik) data dan kebutuhan. Mereka dapat menggunakan diagram pencar untuk menyelidiki dan menjelaskan hubungan antara dua variabel numerik/kuantitatif (termasuk salah satunya variabel bebas berupa waktu). Mereka dapat mengevaluasi laporan statistika di media berdasarkan tampilan, statistika, dan representasi data. Peserta didik dapat menjelaskan peluang dan menentukan frekuensi harapan dari kejadian majemuk. Mereka menyelidiki konsep dari kejadian saling bebas dan saling lepas, dan menentukan peluangnya. |

2. Alur Tujuan Pembelajaran (ATP) Matematika Fase E

Berikut alur tujuan pembelajaran matematika fase E. Guru dapat menggunakan alur tujuan pembelajaran ini atau memodifikasi sesuai kebutuhan peserta didik, karakteristik dan kesiapan satuan pendidikan.

Tabel 3. Alur Tujuan Pembelajaran Matematika Fase E

| Elemen & Capaian Pembelajaran | Tujuan Pembelajaran | Bab |
|--|--|---------------------------------|
| <p>Bilangan</p> <p>Di akhir fase E, peserta didik dapat menggeneralisasi sifat-sifat bilangan berpangkat (termasuk bilangan pangkat pecahan). Mereka dapat menerapkan barisan dan deret aritmetika dan geometri, termasuk masalah yang terkait bunga tunggal dan bunga majemuk.</p> | <ul style="list-style-type: none"> • Mengidentifikasi sifat- sifat eksponen. • Mengidentifikasi bentuk akar. • Mengidentifikasi persamaan eksponensial. • Menyelesaikan permasalahan sehari-hari yang berkaitan dengan fungsi eksponensial. | Bab 1 Eksponen |
| | <ul style="list-style-type: none"> • Menyelesaikan permasalahan kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan konsep barisan aritmetika dan barisan geometri. • Menyelesaikan permasalahan kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan konsep deret aritmetika dan deret geometri. • Menggunakan konsep barisan dan deret untuk menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan bunga tunggal dan bunga majemuk. | Bab 2 Barisan dan Deret |
| <p>Geometri</p> <p>Di akhir fase E, peserta didik dapat menyelesaikan permasalahan segitiga siku-siku yang melibatkan perbandingan trigonometri dan aplikasinya.</p> | <ul style="list-style-type: none"> • Memahami bahwa perbandingan trigonometri menunjukkan hubungan antara sudut dan sisi pada segitiga siku-siku. • Menerapkan perbandingan trigonometri dalam permasalahan. | Bab 3 Perbandingan Trigonometri |

| Elemen & Capaian Pembelajaran | Tujuan Pembelajaran | Bab |
|---|---|---|
| <p>Elemen: Aljabar dan Fungsi</p> <p>Di akhir fase E, peserta didik dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan sistem persamaan linear tiga variabel dan sistem pertidaksamaan linear dua variabel. Mereka dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan persamaan dan fungsi kuadrat (termasuk akar imajiner), serta persamaan eksponensial (berbasis/bilangan pokok sama) dan fungsi eksponensial.</p> | <ul style="list-style-type: none"> • Memodelkan masalah ke dalam sistem persamaan linear dan menyelesaikannya, • Memodelkan masalah ke dalam sistem pertidaksamaan linear dan menyelesaikannya. | <p>Bab 4 Sistem Persamaan dan Pertidaksamaan Linear</p> |
| <p>Elemen: Analisis Data dan Peluang</p> <p>Di akhir fase E, peserta didik dapat merepresentasikan dan menginterpretasi data dengan cara menentukan jangkauan kuartil dan interkuartil. Mereka dapat membuat dan menginterpretasi diagram box plot (box-and-whisker plot) dan menggunakannya untuk membandingkan himpunan data. Mereka dapat menentukan dan menggunakan box plot, histogram, dan dot plot sesuai dengan natur (karakteristik) data dan kebutuhan. Mereka dapat menggunakan diagram pencar untuk menyelidiki dan menjelaskan hubungan</p> | <ul style="list-style-type: none"> • Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan persamaan kuadrat dalam kehidupan sehari-hari. • Menggunakan fungsi kuadrat untuk menyelesaikan masalah dalam kehidupan sehari-hari. • Merepresentasikan data dalam berbagai bentuk grafik dan menganalisisnya • Menentukan grafik yang sesuai dengan jenis data yang ingin ditampilkan • Menghitung ukuran pemusatan dan ukuran penyebaran dari suatu kelompok data serta menggunakannya untuk membandingkan dua kelompok. | <p>Bab 5. Persamaan dan Fungsi Kuadrat</p> <p>Bab 6. Representasi dan Interpretasi Data</p> |

| Elemen & Capaian Pembelajaran | Tujuan Pembelajaran | Bab |
|---|--|-----------------------|
| <p>antara dua variabel numerik/kuantitatif (termasuk salah satunya variabel bebas berupa waktu). Mereka dapat mengevaluasi laporan statistika di media berdasarkan tampilan, statistika, dan representasi data. Peserta didik dapat menjelaskan peluang dan menentukan frekuensi harapan dari kejadian majemuk. Mereka menyelidiki konsep dari kejadian saling bebas dan saling lepas, dan menentukan peluangnya.</p> | <ul style="list-style-type: none"> • Menentukan ruang sampel dan distribusi peluang kejadian. • Membedakan antara kejadian saling lepas dan kejadian tidak saling lepas. • Membedakan antara frekuensi relatif dan frekuensi harapan serta menggunakan frekuensi harapan untuk memprediksi peluang suatu kejadian. • Menggunakan aturan penjumlahan untuk menentukan peluang dua kejadian saling lepas. • Memodifikasi aturan penjumlahan untuk menentukan peluang dua kejadian tidak saling lepas. | <p>Bab 7. Peluang</p> |

C. Strategi Umum Pembelajaran

Buku Siswa dirancang dengan pendekatan Pembelajaran Berbasis Penemuan Terbimbing (*Discovery Learning*) Pada pendekatan ini, peserta didik memiliki kesempatan untuk melakukan eksplorasi terlebih dahulu dan dituntun melalui pertanyaan pengarah terstruktur (*scaffolded questions*) sehingga dapat menemukan konsep utama yang menjadi tujuan dari pembelajaran. Meskipun demikian, guru dapat menggunakan berbagai pendekatan lain disesuaikan dengan kondisi setempat.

Dalam proses pembelajaran, peserta didik dapat melakukan aktivitas eksplorasi baik secara individu, berpasangan, maupun berkelompok. Interaksi antarpeserta didik serta interaksi antarguru dan peserta didik menjadi dasar bagi peserta didik untuk membangun pemahaman yang mendalam. Guru memegang peranan yang sangat esensial di dalam mengarahkan aktivitas pembelajaran, membimbing proses berpikir peserta didik dan memfasilitasi diskusi di dalam kelas untuk mencapai tujuan pembelajaran yang diharapkan.

Dalam konteks pembelajaran jarak jauh (PJJ), guru dapat menggunakan pendekatan *Flipped Classroom*, yang artinya adalah proses pembelajarannya dibalik dari yang konvensional. Pada umumnya, materi disampaikan di kelas kemudian peserta didik mengerjakan tugas di luar kelas. Pendekatan *Flipped Classroom* membalikkan urutan ini, yaitu peserta didik menerima materi di rumah dan mengerjakan latihan di kelas. Dalam konteks PJJ, ini berarti peserta didik dapat melakukan eksplorasi dalam Buku Siswa dengan mengikuti pertanyaan penuntun secara *asynchronous* (sesi tidak langsung, misalnya melalui Google Classroom), kemudian ketika sesi *synchronous* (sesi langsung, misalnya melalui Google Meet atau Zoom), peserta didik berdiskusi dan mengerjakan latihan soal dengan bimbingan guru. Guru dapat juga merekam penjelasan materi sehingga peserta didik dapat menonton pembahasan dari soal eksplorasi termasuk penjelasan konsepnya setelah melakukan eksplorasi secara mandiri. Kegiatan di sesi *synchronous* lebih banyak digunakan untuk diskusi, tanya-jawab, dan memberikan umpan balik kepada peserta didik.

D. Alternatif Pembelajaran

Dalam Buku Panduan Guru ini terdapat saran untuk melakukan diferensiasi pembelajaran (*differentiated instruction*) untuk peserta didik yang mengalami kesulitan maupun untuk peserta didik dengan kecepatan belajar yang tinggi (*advanced learner*). Alternatif penggunaan teknologi juga diberikan untuk konteks sekolah yang peserta didiknya tidak memiliki akses teknologi yang dibutuhkan.

Penggunaan Teknologi

Teknologi dapat bermanfaat dalam pembelajaran Matematika. Berikut diberikan beberapa alternatif teknologi yang dapat digunakan. Selain itu, guru juga dapat menggunakan teknologi lain yang dikuasai.

a. Scientific Calculator

Kalkulator jenis ini selain dapat dimanfaatkan untuk menghitung operasi dasar matematika juga dapat dimanfaatkan untuk fungsi-fungsi matematika yang lain, seperti menghitung eksponen dan logaritma, fungsi-fungsi trigonometri, statistika, kombinatorik, vektor, matriks, dan bilangan

kompleks. Setiap tipe kalkulator memiliki instruksi spesifik yang dapat dipelajari pada buku manualnya, namun ada beberapa hal yang perlu diingat seperti berikut.

a. Tampilan

Perlu diselidiki bagaimana kalkulator menampilkan bilangan. Contohnya untuk pecahan campuran, ada kalkulator yang menampilkan dalam bentuk $8\frac{1}{2}$ namun ada juga yang menampilkan dalam bentuk $8 \text{ } 1 \text{ } 2$. Ada kalkulator yang menampilkan dalam bentuk 5×10^{10} dan ada juga yang menampilkan bilangan yang sama dalam bentuk $5 \text{ E } 10$.

b. Satuan

Untuk fungsi trigonometri, umumnya ada 3 satuan sudut yang dapat dipilih yaitu derajat (deg/D), radian (rad/R), dan gradian (grad/G). Sudut tegak lurus adalah sudut 90° , π rad, dan 100 grad. Pastikan Anda memilih pengaturan satuan yang tepat.

c. Urutan menekan tombol

Ada kalkulator yang untuk menghitung e^2 Anda perlu menekan 2 lalu menekan tombol e^x , namun ada jenis kalkulator yang mengharuskan Anda menekan tombol e^x sebelum menekan 2.

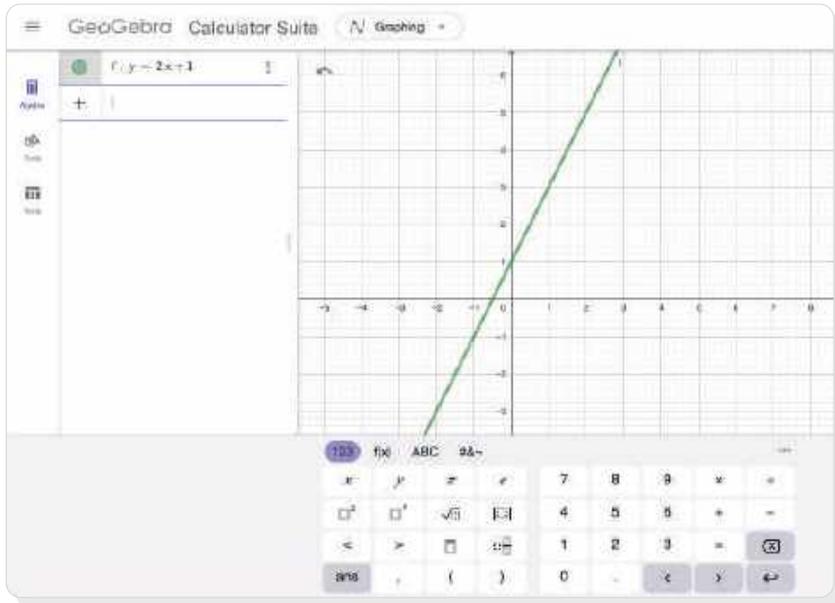
d. Ada juga kalkulator yang dapat menampilkan grafik.

e. Banyak HP Android masa kini yang memiliki fungsi scientific calculator.

b. GeoGebra

GeoGebra memiliki versi berbasis daring, versi yang dapat digunakan secara luring pada laptop, dan juga ada versi Android. GeoGebra dapat digunakan untuk menghitung seperti kalkulator, juga dapat digunakan untuk membuat grafik.

Perbedaan utama penggunaan aplikasi dengan kalkulator terletak pada tombol-tombolnya yang merupakan tombol virtual. Untuk menggambarkan grafik, Anda dapat menuliskan fungsinya pada '+'.



Gambar 1 Tangkapan Layar GeoGebra (2023)

c. Desmos

Desmos juga memiliki versi berbasis web dan versi yang dapat diunduh pada HP Android/iOS. Ada beberapa jenis kalkulator yang dapat dipilih dengan Desmos.



Gambar 2 Tangkapan Layar Desmos (2023)

E. Asesmen

Agar semua peserta didik dapat mencapai tujuan pembelajaran yang dikehendaki, proses pemantauan dan evaluasi pembelajaran perlu dilakukan secara terus-menerus selama proses pembelajaran (penilaian formatif atau *assessment for learning*) dan di akhir proses pembelajaran (penilaian sumatif atau *assessment of learning*). peserta didik juga dilibatkan di dalam proses menilai diri (*assessment as learning*) sehingga mengembangkan kemampuan metakognisi (memonitor proses pembelajaran diri).

Guru dapat melakukan penilaian formatif dan memberikan umpan balik kepada peserta didik melalui aktivitas Ayo, Mencoba dan **Latihan**. Penilaian sumatif dapat dilakukan melalui **Uji kompetensi** di akhir bab. Peserta didik memiliki banyak kesempatan untuk melakukan penilaian diri melalui aktivitas Ayo, Berefleksi di berbagai bagian selama proses pembelajaran dan juga **Refleksi** di bagian akhir dari bab. **Pengayaan** melalui proyek juga merupakan kesempatan bagi guru untuk menilai pengetahuan, keterampilan, dan juga aspek lain seperti kemampuan kolaborasi dan komunikasi di dalam kerja kelompok.

F. Kegiatan Tindak Lanjut

Guru dapat menindaklanjuti proses dan hasil belajar peserta didik melalui beberapa cara, antara lain remedial, pengayaan, dan layanan konseling. Pada bagian ini akan dijelaskan secara ringkas pelaksanaan remedial dan pengayaan.

1. Remedial

Peserta didik yang belum mencapai kriteria ketuntasan belajar berkesempatan untuk memperbaiki hasil belajar melalui kegiatan remedial. Setelah menganalisis hasil penilaian sumatif untuk mengidentifikasi permasalahan kesulitan yang dihadapi oleh peserta didik, guru dapat dengan tepat menyusun kegiatan pembelajaran dan remedial sesuai dengan kebutuhan peserta didik. Kegiatan remedial dapat dilakukan dengan cara penugasan, tutorial sebaya, ataupun pengerjaan ulang soal-soal Latihan dan Uji Kompetensi yang telah tersedia di Buku Siswa.

2. Pengayaan

Untuk peserta didik dengan kecepatan belajar tinggi (*advanced learner*) kegiatan pengayaan dapat diberikan untuk memperdalam dan memperluas kompetensi yang telah dimiliki oleh peserta didik tersebut. Kegiatan ini dilakukan ketika guru masih memiliki waktu untuk melaksanakan pembelajaran sehingga peserta didik yang masuk dalam kategori cepat dapat belajar secara optimal. Kegiatan pengayaan dapat dilakukan dengan berbagai cara, misalnya penugasan, tutorial sebaya, proyek, dan pemecahan masalah. Fitur-fitur dalam Buku Siswa yang dapat digunakan untuk keperluan kegiatan pengayaan antara lain Proyek; Ayo, Bekerja Sama; Ayo, Berdiskusi; Ayo, Berpikir Kritis; dan Ayo, Berpikir Kreatif.

G. Interaksi Guru dengan Orang Tua

Keberhasilan pencapaian peserta didik dalam pembelajaran tidak hanya bergantung pada guru, namun juga melibatkan peran orang tua atau wali siswa. Guru sebaiknya dapat menjalin kerja sama yang baik dengan orang tua atau wali siswa sebagai rekan (*partner*) dengan cara mengomunikasikan pentingnya matematika dan bahwa semua peserta didik memiliki kemampuan untuk belajar matematika kepada orang tua sehingga sikap dan persepsi positif terhadap matematika berkesinambungan baik di sekolah maupun di rumah. Guru perlu membuka diri bagi masukan dari orang tua atau wali, khususnya terhadap minat dan kesulitan yang dihadapi peserta didik sehingga dapat melakukan diferensiasi pembelajaran sesuai dengan kebutuhan peserta didik. Guru dapat memberikan ide-ide kepada orang tua atau wali dalam mendukung pembelajaran putra/putrinya, misalnya bagaimana orang tua dapat menyiapkan lingkungan belajar yang kondusif, memberikan dorongan semangat kepada putra/putrinya ketika mereka belum berhasil dalam pembelajaran, maupun memuji keberhasilan sekecil apapun yang ditunjukkan oleh putra/putrinya. Selain itu, guru sebaiknya juga mengomunikasikan sistem atau metode pembelajaran matematika yang digunakan di sekolah kepada orang tua, khususnya jika pendekatan tersebut baru bagi orang tua, misalnya pendekatan *Flipped Classroom*. Hal ini perlu dilakukan untuk menghindari mispersepsi dari orang tua bahwa guru

“tidak mengajarkan apa-apa”, padahal metode tersebut menuntut peserta didik untuk belajar secara mandiri di rumah. Penyamaan persepsi penting sehingga proses pembelajaran boleh didukung juga dari pihak orang tua.

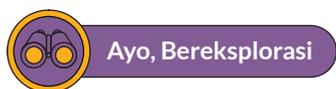
H. Penjelasan Bagian-Bagian Buku Siswa

1. Peta Materi



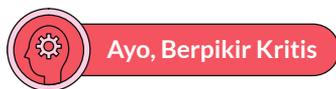
Peta materi yang terdapat pada awal bab merupakan diagram yang menunjukkan alur penyajian materi bab dan subbab. Peserta didik perlu mencermati peta materi ini untuk mendapatkan gambaran yang luas tentang isi bab tersebut.

2. Ayo, Bereksplorasi



Peserta didik melakukan kegiatan ini untuk menyelidiki konsep matematika yang berkaitan dengan pembahasan materi. Eksplorasi selalu dilakukan sebelum peserta didik mendalami konsep matematika beserta aplikasinya.

3. Ayo, Berpikir Kritis



Peserta didik berpikir kritis jika dapat menganalisis informasi untuk mengambil kesimpulan atau menilai suatu hal dengan tepat. Keterampilan ini perlu dilatih terus-menerus karena merupakan salah satu dari keterampilan abad ke-21.

4. Ayo, Berpikir Kreatif



Ayo, Berpikir Kreatif

Peserta didik berpikir kreatif jika dapat membuat ide atau alternatif solusi yang baru yang berbeda dari hal umum.

5. Ayo, Mencoba



Ayo, Mencoba

Peserta didik diharapkan dapat mengerjakan soal atau kegiatan sejenis setelah diberikan penjelasan penyelesaian satu atau lebih dari satu soal.

6. Penguatan Karakter



Penguatan Karakter

Peserta didik diharapkan dapat menghayati dan menerapkan karakter-karakter Profil Pelajar Pancasila yang perlu dipupuk sepanjang hayat dalam kegiatan pembelajaran serta kehidupan sehari-hari.

7. Ayo, Berdiskusi



Ayo, Berdiskusi

Bertukar pikiran dengan teman-teman dan menyatakan gagasan merupakan kegiatan yang bermanfaat untuk memperdalam pengetahuan sehingga dapat menyelesaikan masalah atau menjawab pertanyaan.

8. Petunjuk



Petunjuk

Petunjuk untuk peserta didik gunakan dalam pemecahan masalah. Arahkan peserta didik untuk membaca dan menggunakan bagian ini jika peserta didik mengalami kendala saat mencari solusi dari sebuah masalah.

9. Tahukah Kamu?



Tahukah Kamu?

Peserta didik mendapatkan informasi tambahan yang berkaitan dengan materi yang sedang dipelajari yang merupakan aplikasi matematika dalam suatu fenomena atau peristiwa.

10. Ayo, Berefleksi



Ayo, Berefleksi

Merenungkan dan melihat kembali secara evaluatif dan mendalam apa yang sudah dipelajari, membandingkannya, dan menarik pelajaran atau kesimpulan sederhana.

11. Ayo, Mengingat Kembali



Ayo, Mengingat Kembali

Apa yang telah peserta didik pelajari di SMP berhubungan dengan apa yang akan dipelajari di kelas X. Peserta didik akan lebih mudah memahami materi pelajaran kelas X dengan pengetahuan yang telah dipelajari di SMP.

12. Ayo, Bekerja Sama



Ayo, Bekerja Sama

Bekerja sama merupakan salah satu bentuk dari bergotong royong. Peserta didik bekerja sama untuk menyelesaikan masalah atau menjawab pertanyaan matematika sehingga pemahaman peserta didik terhadap materi pelajaran lebih baik lagi. Selain itu, bekerja sama memerlukan saling memahami dan menghargai satu sama lain.

13. Ayo, Menggunakan Teknologi



Ayo, Menggunakan Teknologi

Teknologi memudahkan peserta didik untuk menyelesaikan masalah atau pekerjaan matematika. Peserta didik dapat memanfaatkan kalkulator dan berbagai aplikasi untuk mengerjakan tugas. Peserta didik dapat memilih teknologi yang sesuai dengan kebutuhan mereka.

14. Contoh Soal

Contoh 2

Sederhanakan bentuk eksponen $(x^{\frac{1}{3}})^2 \times (x^{\frac{4}{3}})$

Alternatif Penyelesaian:

$$\begin{aligned}(x^{\frac{1}{3}})^2 \times (x^{\frac{4}{3}}) &= (x^{\frac{2}{3}}) \times (x^{\frac{4}{3}}) \\ &= x^{\frac{2}{3} + \frac{4}{3}} \\ &= x^{\frac{6}{3}} \\ &= x^2\end{aligned}$$

Bagian ini diberikan untuk membantu pemahaman peserta didik atas konsep yang dipelajari. Perhatikan contoh soal dan kaitkan dengan penjelasan sebelumnya agar peserta didik merasakan manfaat bagian tersebut.

15. Latihan

Latihan 1.2

Jawablah pertanyaan berikut ini.

1. Bakteri *E.coli* menyebabkan penyakit diare pada manusia. Seorang peneliti mengamati pertumbuhan 50 bakteri ini pada sepotong makanan dan menemukan bahwa bakteri ini membelah menjadi 2 setiap seperempat jam.
 - a. Gambarkan tabel dan grafik yang menunjukkan pertumbuhan bakteri ini dari fase 0 sampai fase 5.
 - b. Modelkan fungsi yang menggambarkan pertumbuhan bakteri *E.coli* setiap seperempat jam.

Petunjuk

Gunakan aplikasi GeoGebra untuk membantumu menggambarkan grafik tersebut. Kunjungi www.geogebra.org

Peserta didik mengerjakan soal-soal dengan tiga jenis tingkat kesulitan, yaitu dasar, menengah, dan tinggi. Pertanyaan pada tingkat dasar berupa jawaban pendek yang menguji pemahaman konsep dan keterampilan dasar. Tingkat menengah berupa permasalahan yang lebih terstruktur, sedangkan tingkat tinggi merupakan permasalahan aplikasi dan keterampilan aras tinggi (HOTS).

16. Uji Kompetensi

Uji Kompetensi

1. Selesaikanlah

a. $\left(\frac{x^{-5}y^4}{xy^3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{x^7y^{-3}}{x^{-4}y^6}\right)^{-\frac{1}{2}}, x \neq 0, y \neq 0$

b. $\frac{(m^{10}n^{-2})^3 (m^5n^{-5})^3}{mn}, m \neq 0, n \neq 0$

c. $\frac{p+q}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}, p \neq 0, q \neq 0$

Terdapat pada akhir bab, merupakan sarana bagi peserta didik untuk mengukur pencapaian mereka dalam topik bab. peserta didik dapat mengerjakan sejumlah soal yang bervariasi dari yang sederhana hingga yang kompleks. Selain itu, soal dapat berupa hitungan ataupun pemahaman konsep.

17. Pengayaan

Pengayaan

Permainan Pangkat

Dalam permainan ini, kamu menggunakan himpunan bilangan yang diberikan untuk membuat sebuah bilangan tujuan hanya boleh menggunakan operasi pangkat atau mencari hasil kali dua bilangan.

Setiap bilangan hanya boleh digunakan sekali saja. Kamu tidak harus menggunakan semua bilangan. Adakalanya lebih dari satu cara untuk membuat bilangan tujuan, sehingga cobalah untuk melihat berapa banyak cara yang dapat kamu temukan.

Contoh:

Himpunan bilangan: 2, 3, 4, 5, 16, 32 dan bilangan tujuan: 8

Cara 1: $2^3 = 8$

Cara 2: $32^{\left(\frac{1}{5}\right)} \times 16^{\left(\frac{1}{2}\right)}$

Kegiatan yang dapat digunakan untuk memperluas atau memperdalam wawasan dan pemahaman atas konsep matematika yang sedang dipelajari. Materi pengayaan dapat bersifat sebagai pendalaman materi, penerapan dalam bidang teknologi/informatika, atau kegiatan eksplorasi/proyek.

18. Refleksi

Refleksi

Dalam bab ini kamu sudah belajar tentang bilangan eksponen dan fungsi eksponen. Ayo refleksikan pembelajaranmu dengan menjawab pertanyaan berikut.

1. Apa itu bilangan eksponen?
2. Seperti apa bentuk fungsi eksponen?
3. Apa yang membedakan fungsi pertumbuhan eksponen dan peluruhan eksponen?

Pada akhir bab atau subbab, peserta didik akan diajak memikirkan kembali apa yang sudah dipelajari dan seberapa dalam/tepat pemahaman mereka atas pembelajaran pada bagian tersebut.

I. Skema Pembelajaran

| Bab 1 | |
|------------------------|---|
| 1. Tujuan Pembelajaran | <ul style="list-style-type: none"> • Mengidentifikasi sifat-sifat eksponen, bentuk akar, dan fungsi eksponensial. • Menyelesaikan permasalahan sehari-hari yang berkaitan dengan fungsi eksponensial. |
| 2. Alokasi Waktu | 15 JP |
| 3. Pokok Materi | <ul style="list-style-type: none"> • Sifat-Sifat Eksponen • Fungsi Eksponensial • Bentuk Akar |
| 4. Kata Kunci | eksponen, pangkat, fungsi eksponensial, bentuk akar |

| | |
|--------------------------------------|---|
| 5. Aktivitas Pembelajaran | <ul style="list-style-type: none"> • Eksplorasi 1.1 Penyebaran virus - memperhatikan pola penyebaran virus. • Eksplorasi 1.2 Sifat-sifat eksponen - menemukan sifat-sifat eksponen. • Eksplorasi 1.3 Fungsi eksponensial - menyelesaikan permasalahan yang terkait dengan pengenalan fungsi eksponensial. |
| 6. Aktivitas Pembelajaran Alternatif | |
| 7. Sumber Belajar | |
| 8. Asesmen | <ul style="list-style-type: none"> • Asesmen Awal: Ayo, Mengingat Kembali • Formatif: Latihan 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5 • Sumatif: Uji Kompetensi |
| Bab 2 | |
| 1. Tujuan Pembelajaran | <ul style="list-style-type: none"> • Menyelesaikan permasalahan kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan konsep barisan aritmetika dan barisan geometri • Menyelesaikan permasalahan kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan konsep deret aritmetika dan deret geometri • Menggunakan konsep barisan dan deret untuk menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan bunga tunggal dan bunga majemuk |
| 2. Alokasi Waktu | 15 JP |
| 3. Pokok Materi | <ul style="list-style-type: none"> • Barisan aritmetika • Barisan geometri • Deret aritmetika • Deret geometri • Bunga tunggal • Bunga majemuk |
| 4. Kata Kunci | Barisan aritmetika, barisan geometri, deret aritmetika, deret geometri, bunga tunggal dan bunga majemuk |

| | |
|--------------------------------------|---|
| 5. Aktivitas Pembelajaran | <ul style="list-style-type: none"> • Eksplorasi 2.1 Banyaknya Kursi • Eksplorasi 2.2 Gedung Pertunjukan Seni • Eksplorasi 2.3 Melipat Kertas • Eksplorasi 2.4 Pembelahan Bakteri • Eksplorasi 2.5 Jabat Tangan • Eksplorasi 2.6 Jumlah Pasien Terinfeksi Covid-19 • Eksplorasi 2.7 Memotong Kertas • Eksplorasi 2.8 Tabungan dengan Bunga Tunggal • Eksplorasi 2.9 Tabungan dengan Bunga Majemuk |
| 6. Aktivitas Pembelajaran Alternatif | <i>Think, pair, share</i> |
| 7. Sumber Belajar | |
| 8. Asesmen | <ul style="list-style-type: none"> • Asesmen awal: Ayo, Mengingat Kembali • Formatif: Latihan • Sumatif: Uji Kompetensi |
| Bab 3 | |
| 1. Tujuan Pembelajaran | <ul style="list-style-type: none"> • Memahami bahwa perbandingan trigonometri menunjukkan hubungan antara sudut dan sisi pada segitiga siku-siku. • Menerapkan perbandingan trigonometri dalam permasalahan. |
| 2. Alokasi Waktu | 15 JP |
| 3. Pokok Materi | <ul style="list-style-type: none"> • Perbandingan trigonometri • Pemanfaatan perbandingan trigonometri |
| 4. Kata Kunci | Perbandingan trigonometri, sinus (sin), cosinus (cos), tangen (tan) |
| 5. Aktivitas Pembelajaran | <ul style="list-style-type: none"> • Eksplorasi 3.1 Bayangan dan Tinggi Badan • Eksplorasi 3.2 Tinggi dan Jari-Jari Piramida • Eksplorasi 3.3 Sudut Istimewa Trigonometri |

| | |
|--------------------------------------|---|
| 6. Aktivitas Pembelajaran Alternatif | Video youtube untuk membedakan nilai perbandingan sin, cos, tan |
| 7. Sumber Belajar | |
| 8. Asesmen | <ul style="list-style-type: none"> • Asesmen Awal: Ayo, Mengingat Kembali • Formatif: Latihan 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6 • Sumatif: Uji Kompetensi |
| Bab 4 | |
| 1. Tujuan Pembelajaran | <ul style="list-style-type: none"> • Memodelkan masalah ke dalam sistem persamaan linear dan menyelesaikannya • Memodelkan masalah ke dalam sistem pertidaksamaan linear dan menyelesaikannya |
| 2. Alokasi Waktu | 15 JP |
| 3. Pokok Materi | <ul style="list-style-type: none"> • Sistem persamaan linear • Sistem pertidaksamaan linear |
| 4. Kata Kunci | Sistem Persamaan Linear, Sistem Pertidaksamaan Linear, Solusi/Penyelesaian, Variabel |
| 5. Aktivitas Pembelajaran | <ul style="list-style-type: none"> • Eksplorasi 4.1 Menimbang Bola yang Ada di Sekolah • Eksplorasi 4.2 Menimbang Buah • Eksplorasi 4.3 Perayaan Hari Kemerdekaan |
| 6. Aktivitas Pembelajaran Alternatif | <i>Think, pair, share</i> |
| 7. Sumber Belajar | |
| 8. Asesmen | <ul style="list-style-type: none"> • Asesmen awal: Ayo Mengingat Kembali • Formatif: Latihan • Sumatif: Uji Kompetensi |

| Bab 5 | |
|--------------------------------------|---|
| 1. Tujuan Pembelajaran | <ul style="list-style-type: none"> • Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan persamaan kuadrat dalam kehidupan sehari-hari. • Menggunakan fungsi kuadrat untuk menyelesaikan masalah dalam kehidupan sehari-hari. |
| 2. Alokasi Waktu | 15 JP |
| 3. Pokok Materi | <ul style="list-style-type: none"> • Persamaan kuadrat • Fungsi kuadrat |
| 4. Kata Kunci | Persamaan kuadrat, akar-akar persamaan kuadrat, variabel, fungsi kuadrat, diskriminan. |
| 5. Aktivitas Pembelajaran | <ul style="list-style-type: none"> • Eksplorasi 5.1 merumuskan masalah sehari-hari dalam pernyataan matematika. • Eksplorasi 5.2 menyelesaikan soal-soal persamaan kuadrat dengan cara faktorisasi. • Eksplorasi 5.3 menyelesaikan soal-soal persamaan kuadrat dengan cara melengkapi kuadrat sempurna. • Eksplorasi 5.4 menurunkan rumus kuadrat • Eksplorasi 5.5 nilai diskriminan dan jenis akar • Eksplorasi 5.6 karakteristik fungsi kuadrat • Eksplorasi 5.7 mengonstruksi fungsi kuadrat • Eksplorasi 5.8 mengubah dari satu bentuk ke bentuk lainnya • Eksplorasi 5.9 menyelesaikan permasalahan kontekstual • Eksplorasi 5.10 menyelesaikan permasalahan kontekstual |
| 6. Aktivitas Pembelajaran Alternatif | <i>Think, pair, and share</i> |

| | |
|--------------------------------------|--|
| 7. Sumber Belajar | |
| 8. Asesmen | <ul style="list-style-type: none"> • Formatif: Ayo mengingat, Ayo Refleksi, Latihan 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.7, 5.8, 5.9, 5.10 • Sumatif: Refleksi, Uji Kompetensi |
| Bab 6 | |
| 1. Tujuan Pembelajaran | <ul style="list-style-type: none"> • Merepresentasikan data dalam berbagai bentuk grafik dan menganalisisnya. • Menentukan grafik yang sesuai dengan jenis data yang ingin ditampilkan. • Menghitung ukuran pemusatan dan ukuran penyebaran dari suatu kelompok data serta menggunakannya untuk membandingkan dua kelompok. |
| 2. Alokasi Waktu | 18 JP |
| 3. Pokok Materi | <ul style="list-style-type: none"> • Histogram, diagram Batang dan Frekuensi Relatif • Ukuran Pemusatan • Ukuran Penempatan • Box-and-Whisker Plot dan Diagram Pencar |
| 4. Kata Kunci | Frekuensi, Diagram, Ukuran Pemusatan, Ukuran Penyebaran. |
| 5. Aktivitas Pembelajaran | Penemuan terbimbing |
| 6. Aktivitas Pembelajaran Alternatif | <i>Think, pair, and share</i> |
| 7. Sumber Belajar | |
| 8. Asesmen | <ul style="list-style-type: none"> • Asesmen awal: Ayo Mengingat • Formatif: Latihan • Sumatif: Uji Kompetensi |

Bab 7

| | |
|--------------------------------------|---|
| 1. Tujuan Pembelajaran | <ul style="list-style-type: none">• Menentukan ruang sampel dan distribusi peluang kejadian.• Membedakan antara kejadian saling lepas dan kejadian tidak saling lepas.• Membedakan antara frekuensi relatif dan frekuensi harapan serta menggunakan frekuensi harapan untuk memprediksi peluang suatu kejadian.• Menggunakan aturan penjumlahan untuk menentukan peluang dua kejadian saling lepas.• Memodifikasi aturan penjumlahan untuk menentukan peluang dua kejadian tidak saling lepas |
| 2. Alokasi Waktu | 15 JP |
| 3. Pokok Materi | <ul style="list-style-type: none">• Distribusi Peluang• Aturan Penjumlahan• Aturan Perkalian |
| 4. Kata Kunci | Peluang, ruang sampel, frekuensi harapan, kejadian saling lepas, kejadian saling bebas |
| 5. Aktivitas Pembelajaran | Eksplorasi 7.1 kejadian dengan dua dadu Eksplorasi 7.2 aturan penjumlahan Eksplorasi 7.3 aturan perkalian |
| 6. Aktivitas Pembelajaran Alternatif | <i>Think, pair, and share</i> |
| 7. Sumber Belajar | |
| 8. Asesmen | <ul style="list-style-type: none">• Formatif: Ayo Mengingat, Ayo Refleksi, Latihan 7.1, 7.2, 7.3, 7.4, 7.5, 7.6• Sumatif: Refleksi, Uji Kompetensi |



Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Republik Indonesia, 2023

**Panduan Guru Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas X
(Edisi Revisi)**

Penulis: Dicky Susanto, dkk.
ISBN: 978-623-118-562-4

Bab

3

Panduan Khusus

Eksponen



Apa saja permasalahan sehari-hari yang dapat diselesaikan dengan bentuk eksponen?

Pendahuluan

Setelah mempelajari bab ini, peserta didik diharapkan dapat mengidentifikasi sifat-sifat eksponen, bentuk akar, dan fungsi eksponensial, serta dapat menyelesaikan permasalahan sehari-hari yang berkaitan dengan fungsi eksponensial. Memahami dan bernalar mengenai eksponen.

Untuk memastikan bahwa tujuan pembelajaran telah tercapai, beberapa kriteria berikut dapat digunakan:

- Peserta didik mampu membedakan bentuk eksponen dan yang bukan eksponen
- Peserta didik mampu menentukan apakah sebuah situasi berkaitan dengan bentuk eksponen
- Peserta didik mampu memodelkan permasalahan dalam bentuk eksponen
- Peserta didik mampu menjelaskan sifat-sifat dari eksponen
- Peserta didik mampu menggunakan sifat-sifat eksponen dalam menyelesaikan persamaan eksponen
- Peserta didik mampu membuktikan sifat-sifat eksponen
- Peserta didik mampu membedakan antara pertumbuhan dan peluruhan eksponen
- Peserta didik mampu memodelkan permasalahan dengan fungsi eksponensial
- Peserta didik mampu menyederhanakan bentuk akar
- Peserta didik mampu mengubah penyebut pecahan yang mengandung bentuk akar dengan benar

Banyak fenomena dalam kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan eksponen, misalnya pertumbuhan bakteri atau virus, tingkat penyebaran penyakit menular, penurunan suhu segelas air panas pada suhu ruangan, dan sebagainya. Peserta didik diharapkan mampu menggunakan eksponen untuk menyelesaikan permasalahan tersebut. Peserta didik akan menggunakan konsep yang dipelajari di bab ini dalam pembelajaran di Bab 2 mengenai barisan dan deret geometri.

Peta Materi



Bab ini disarankan diselesaikan dalam 15 JP, namun guru dapat menyesuaikan dengan kondisi satuan pendidikan setempat dengan memperhitungkan keragaman kondisi, potensi, kemampuan individu peserta didik, dan dinamika kelas.

Konsep dan Keterampilan Prasyarat

Untuk mempelajari bab ini, peserta didik diharapkan sudah menguasai konsep dasar aritmetika dan operasinya, termasuk bentuk akar, yang telah dipelajari pada jenjang sebelumnya. Namun demikian, pembelajaran tetap dapat dilakukan sambil dilakukan penguatan jika peserta didik belum menguasai konsep dasar tersebut.

Penyajian Materi Esensial

Pada subbab A peserta didik akan melakukan berbagai eksplorasi yang terkait dengan eksponen. Peserta didik diberi suatu permasalahan dan memodelkan permasalahan tersebut sebagai suatu bentuk eksponen. Pada subbab B peserta didik selanjutnya diajak untuk memahami bagaimana sifat-sifat eksponen dan membuktikan sifat-sifat tersebut melalui eksplorasi yang diberikan.

Pada subbab C, peserta didik kemudian melanjutkan eksplorasi permasalahan yang terkait dengan fungsi eksponensial. Fungsi eksponensial yang akan dibahas terkait dengan fungsi pertumbuhan eksponen dan fungsi peluruhan eksponen. Eksplorasi yang terkait dengan kedua fungsi tersebut juga diberikan agar peserta didik dapat membangun pemahamannya mengenai kedua fungsi tersebut. Selanjutnya pada subbab D, peserta didik diajak untuk memahami hubungan bilangan pangkat dan Akar serta merasionalkan bentuk akar.

Apersepsi

Perkenalkan bab ini dengan menanyakan peserta didik kapan konsep Eksponen muncul di dalam kehidupan mereka sehari-hari. Setelah itu, sampaikan pertanyaan pemantik (misalnya, bagaimana menggambarkan bentuk eksponen? Masalah sehari-hari apa yang dapat diselesaikan dengan eksponen?) dan beri tahu peserta didik bahwa mereka akan memikirkan dan mencoba mendapatkan jawaban terhadap pertanyaan ini selama pembelajaran bab mengenai Eksponen.

Penilaian Sebelum Pembelajaran

Gunakan bagian **Ayo, Mengingat Kembali** mengenai perkalian berulang yang sudah dipelajari di SMP bahkan SD. Pertanyaan-pertanyaan berikut dapat digunakan untuk mengaktifkan prapengetahuan peserta didik:

- Bagaimana kamu menuliskan bentuk $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ dengan lebih singkat?
- Bagaimana bentuk sederhana dari perkalian $15 \times 15 \times 15 \times 15$?
- Apakah ada bentuk lain dari 2^6 ?

Panduan Pembelajaran

A. Definisi Eksponen



Kriteria Ketercapaian Tujuan Pembelajaran

- Peserta didik mampu membedakan bentuk eksponen dan yang bukan eksponen
- Peserta didik mampu menentukan apakah sebuah situasi berkaitan dengan bentuk eksponen
- Peserta didik mampu memodelkan permasalahan dalam bentuk eksponen



Sarana & Prasarana Pembelajaran

- Meja belajar peserta didik di kelas
- Kertas grafik
- Aplikasi GeoGebra jika memungkinkan



Pemanasan

Mulai aktivitas pembelajaran dengan meminta peserta didik berdiskusi tentang situasi yang terjadi saat penyebaran virus Covid-19. Kemudian minta peserta didik melakukan **Eksplorasi 1.1**. Peserta didik dapat melakukan eksplorasi sendiri-sendiri terlebih dahulu kemudian baru diskusi secara berpasangan atau dalam kelompok, atau langsung bekerja sama berpasangan atau di dalam kelompok.

Eksplorasi 3.1 Penyebaran Hoaks



Ayo, Bereksplorasi

Sebelum membahas permasalahan pada **Eksplorasi 1.1**, peserta didik diminta untuk membentuk kelompok yang terdiri atas 4 orang kemudian sajikan permasalahan yang terdapat pada **Eksplorasi 1.1** tentang penyebaran hoaks. Setelah mencoba langsung, peserta didik diarahkan untuk menjawab setiap pertanyaan.

1. Berikut ini tabel yang sudah dilengkapi.

| | | | | | | | | |
|----------------------------------|---|---|---|----|----|----|-----|-----|
| Fase Penyebaran | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Banyak orang yang menerima hoaks | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 |

Guru dapat menanyakan kepada peserta didik cara menemukan bilangan-bilangan tersebut. Bilangan-bilangan tersebut diperoleh karena setiap orang akan menyebarkan pada dua orang lain pada fase selanjutnya.

- Banyak orang yang tertular pada fase ke-6 adalah 64. Peserta didik mungkin akan menjawab bahwa mereka mengalikan bilangan pada fase sebelumnya dengan 2 atau mengatakan bahwa mereka akan mengalikan 2 sebanyak 6 kali karena yang akan dicari adalah banyaknya orang yang tertular pada fase ke-6.
- Banyaknya orang yang menerima hoaks adalah banyaknya orang yang (baru) menerima hoaks ditambah banyaknya orang yang menerima hoaks pada fase-fase sebelumnya. Setelah fase ke-2, banyaknya orang yang menerima hoaks adalah $2+4=6$, setelah fase ke-4 sebanyak $2+4+8+16=30$ orang.

Karena itu, perlu dicek setelah fase ke-7, banyaknya orang yang menerima hoaks setelah fase ke-7 adalah $2+4+8+16+32+64+128=254$ orang, sehingga setelah fase ke-7 sudah ada lebih dari 200 orang yang menerima hoaks. (Peserta didik dapat diminta mengklarifikasi bahwa setelah fase ke-6 penerima hoaks belum mencapai 200 orang.)



Ayo, Bekerja Sama

Peserta didik diminta membandingkan rumus yang dijawab dari no. 4 dengan isi tabel. Jika peserta didik menjawab selain 2^n di no. 4, diharapkan mereka akan menemukan ketidakcocokan dan menyesuaikan jawabannya.



Miskonsepsi

Miskonsepsi yang mungkin akan terjadi adalah peserta didik akan menjawab fase ke-8 karena melihat banyaknya orang yang tertular pada fase ke-8 adalah 256. Padahal yang akan dicari sebenarnya adalah jumlah kumulatif orang yang tertular virus tersebut, bukan banyaknya orang yang tertular pada fase tertentu.

- Jika banyak fase yang terjadi adalah n , banyak orang yang menerima hoaks tersebut direpresentasikan dalam bentuk 2^n .

Pada bagian **Eksplorasi 1.1**, biarkan peserta didik mencoba dan tidak dituntut pasti mendapatkan jawabannya. Tujuannya ialah agar mereka mulai memikirkan bagaimana cara menggunakan tabel penularan virus untuk mulai memikirkan hubungan antara fase penularan dan banyaknya orang

yang tertular kemudian melihat apakah ada pola istimewa dari hubungan tersebut.

Kaitkan hasil eksplorasi peserta didik dengan penjelasan konsep definisi eksponen. Minta peserta didik membandingkan kembali dengan hasil mereka pada eksplorasi dan diskusikan jika masih ada yang masih belum jelas atau membingungkan. Berikan beberapa contoh bentuk eksponen dan mintalah peserta didik untuk memberikan contoh eksponen berdasarkan definisi yang ada.

B. Sifat-Sifat Eksponen



Kriteria Ketercapaian Tujuan Pembelajaran

- Peserta didik mampu menjelaskan sifat-sifat dari eksponen
- Peserta didik mampu menggunakan sifat-sifat eksponen dalam menyelesaikan persamaan eksponen
- Peserta didik mampu membuktikan sifat-sifat eksponen

Eksplorasi 3.2 Sifat-Sifat Eksponen



Ayo, Bereksplorasi

Pada **Eksplorasi 1.2** peserta didik diajak untuk menemukan sifat-sifat eksponen berikut ini.

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3. $(a^m)^n = a^{m \times n}$

Peserta didik diminta untuk memperhatikan **Tabel 1.1** pada Buku Siswa dan mencoba menyelesaikan beberapa bentuk eksponen yang ada pada **Eksplorasi 1.2** yang menggiring mereka untuk menemukan sifat-sifat tersebut. Berikut jawaban dari pertanyaan pada eksplorasi ini.

Jawaban Eksplorasi 1.2

1. $2^2 \cdot 2^3 = 4 \times 8 = 32 = 2^5$
2. $2^5 \cdot 2^2 = 32 \times 4 = 128 = 2^7$
3. $2^3 \cdot 2^7 = 8 \times 128 = 1024 = 2^{10}$
4. $\frac{2^8}{2^6} = \frac{256}{64} = 4 = 2^2$
5. $\frac{2^{10}}{2^3} = \frac{1024}{8} = 128 = 2^7$
6. $\frac{2^6}{2^4} = \frac{64}{16} = 4 = 2^2$
7. $(2^3)^3 = (8)^3 = 512 = 2^9$
8. $(2^4)^2 = (16)^2 = 256 = 2^8$
9. $(2^2)^5 = (4)^5 = 1024 = 2^{10}$

Dari eksplorasi di atas dapat disimpulkan bahwa:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3. $(a^m)^n = a^{m \times n}$

Mintalah peserta didik untuk memahami sifat-sifat eksponen yang disajikan pada buku. Ajak peserta didik untuk mengamati syarat yang ada pada masing-masing sifat tersebut. Misalnya pada Sifat 1 mengapa nilai $a \neq 0$ dan seterusnya. Hal ini dapat menjadi diskusi yang menarik untuk dibahas dengan peserta didik. Setelah itu, lanjutkan kegiatan peserta didik untuk membuktikan sifat-sifat eksponen yang lainnya pada kegiatan **Ayo, Berpikir Kreatif**.



Ayo, Berpikir Kreatif

Bukti Sifat 4

$$(ab)^m = a^m \times b^m, \text{ dengan } a, b \neq 0, \text{ dan } m \text{ bilangan bulat}$$

Alternatif 1

$$(ab)^m = \underbrace{ab \times ab \times ab \times \dots \times ab}_{m \text{ faktor}}$$

$$(ab)^m = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{m \text{ faktor}} \times \underbrace{b \times b \times b \times \dots \times b}_{m \text{ faktor}}$$

$$(ab)^m = a^m \times b^m$$

Alternatif 2

Peserta didik dapat mengambil sebarang bilangan bulat m , a dan b . Lalu melakukan hal yang sama dengan proses yang ada pada **Eksplorasi 1.2**



Diferensiasi

Untuk peserta didik yang mengalami kesulitan, guru dapat mengarahkan peserta didik untuk memulai pembuktian seperti yang ada pada Alternatif 2. Baru kemudian arahkan peserta didik untuk membuktikan secara formal seperti pada Alternatif 1.

Bukti Sifat 5

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, \text{ dengan } b \neq 0, \text{ dan } m \text{ bilangan bulat}$$

Alternatif 1

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \underbrace{\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \dots \times \frac{a}{b}}_{m \text{ faktor}}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{\underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{m \text{ faktor}}}{\underbrace{b \times b \times b \times \dots \times b}_{m \text{ faktor}}} \longrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

Alternatif 2

Peserta didik dapat mengambil sebarang bilangan bulat m , a dan b . Lalu melakukan hal yang sama dengan proses yang ada pada **Eksplorasi 1.2**



Untuk peserta didik yang mengalami kesulitan, guru dapat mengarahkan peserta didik untuk memulai pembuktian seperti yang ada pada Alternatif 2. Baru kemudian arahkan peserta didik untuk membuktikan secara formal seperti pada Alternatif 1.

Kunci Jawaban Latihan 1.1

1. Sifat 6:

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right) \left(a^{\frac{p}{n}}\right) = \left(a\right)^{\frac{m+p}{n}} \text{ dengan } a > 0, \frac{m}{n} \text{ dan } \frac{p}{n} \text{ bilangan rasional dengan } n \neq 0$$

Bukti:

Dengan menggunakan Sifat 1 maka berlaku

$$\begin{aligned} \left(a^{\frac{m}{n}}\right) \left(a^{\frac{p}{n}}\right) &= \left(a\right)^{\frac{m}{n} + \frac{p}{n}} \\ \left(a^{\frac{m}{n}}\right) \left(a^{\frac{p}{n}}\right) &= \left(a\right)^{\frac{m+p}{n}} \end{aligned}$$

Sifat 7:

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right) \left(a^{\frac{p}{q}}\right) = \left(a\right)^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}, a > 0, \frac{m}{n}, \frac{p}{q} \text{ bilangan rasional dengan } n, q \neq 0$$

Bukti:

Dengan menggunakan Sifat 1 maka berlaku

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right) \left(a^{\frac{p}{q}}\right) = \left(a\right)^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}$$

2. Menentukan nilai p

a. $(3^4)^2 = 3^8$

b. $b^4 \cdot b^5 = b^9$

c. $(3\pi)^3 = 27\pi^3$

3. Menyederhanakan

a.
$$\begin{aligned} \left(\frac{2^4 \times 3^6}{2^3 \times 3^2}\right)^3 &= (2^{4-3} \times 3^{6-2})^3 \\ &= (2^1 \times 3^4)^3 \\ &= 2^{1 \cdot 3} \times 3^{4 \cdot 3} \\ &= 2^3 \times 3^{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b. } (3u^3v^5)(9u^4v) &= 3 \cdot 9 \cdot u^{3+4} v^{5+1} \\
 &= 3^1 \cdot 3^2 \cdot u^{3+4} v^{5+1} \\
 &= 3^{1+2} \cdot u^{3+4} v^{5+1} \\
 &= 3^3 \cdot u^7 v^6 \\
 \text{c. } \left(\frac{n^{-1}r^4}{5n^{-6}r^{-4}} \right)^2 &= \left(\frac{n^{-1-(-6)}r^{4-(-4)}}{5} \right)^2 \\
 &= \left(\frac{n^{-1+6}r^{4+4}}{5} \right)^2 \\
 &= \left(\frac{n^5r^8}{5} \right)^2 \\
 &= \frac{n^{10}r^{16}}{25}
 \end{aligned}$$

C. Fungsi Eksponensial



Kriteria Ketercapaian Tujuan Pembelajaran

- Peserta didik mampu membedakan antara pertumbuhan dan peluruhan eksponen
- Peserta didik mampu memodelkan permasalahan dengan fungsi eksponensial

Dalam mempelajari fungsi eksponensial, kegiatan diawali dengan mengajak peserta didik melakukan **Eksplorasi 1.3**.

Eksplorasi 3.3 Fungsi Eksponensial



Ayo, Bereksplorasi

Pada bagian ini peserta didik diminta untuk menyelesaikan permasalahan yang terkait dengan pengenalan fungsi eksponensial. Masalah yang disajikan adalah mengenai penularan virus. Peserta didik selanjutnya diminta untuk menjawab setiap pertanyaan yang diberikan.

1. Untuk menentukan banyaknya orang yang tertular pada fase selanjutnya, ajak peserta didik untuk mendata banyak orang yang tertular pada setiap

fase, salah satunya dengan bantuan tabel.

Peserta didik boleh menggunakan cara yang lainnya juga, misalnya dengan mendata tanpa membuat tabel.

| Fase Penularan | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|----------------------------|---|---|----|----|-----|-----|-------|-------|
| Banyak orang yang tertular | 3 | 9 | 27 | 81 | 243 | 729 | 2.187 | 6.561 |

Dari data tersebut tampak bahwa banyak orang yang tertular virus pada setiap fasenya membentuk sebuah pola. Misalkan N adalah banyaknya orang yang tertular virus pada setiap fasenya, karena $N = 3^n$.

Peserta didik cukup menentukan banyak orang yang tertular pada beberapa fase saja dan melihat apa ada hubungan atau pola yang muncul.

2. Banyaknya orang yang tertular pada fase ke-20 adalah $N = 3^{20} = 3.486.784.401$. Peserta didik dapat mencari hasil penghitungan tersebut dengan menggunakan kalkulator.
3. Dari grafik tersebut diperoleh bahwa yang merepresentasikan peningkatan jumlah orang yang tertular virus tersebut jika proses penularan terjadi terus-menerus adalah grafik nomor III. Jika diperhatikan peningkatan kasus pada setiap fasenya, peningkatan jumlah orang yang tertular virus tersebut cukup signifikan pertumbuhannya sehingga grafik III paling tepat menggambarkan kondisi tersebut. Guru dapat menanyakan kepada peserta didik apa yang digambarkan pada grafik I dan II.
4. Fungsi yang tepat menggambarkan penularan virus tersebut adalah fungsi eksponensial. Ini yang akan dipelajari oleh peserta didik pada bagian ini.

Setelah mengerjakan **Eksplorasi 1.3**, guru kemudian mengajak peserta didik untuk mendiskusikan permasalahan tersebut. Apakah ada hubungan yang menarik antara fase dan banyaknya orang yang tertular pada setiap fasenya. **Eksplorasi 1.3** akan membantu peserta didik untuk memahami permasalahan ini.

Diskusi dilanjutkan dengan pembahasan tentang fungsi eksponensial. Peserta didik diperkenalkan dengan definisi fungsi eksponensial. Pada bagian ini guru dapat menambahkan eksplorasi misalnya dengan menunjukkan beberapa bentuk grafik fungsi eksponensial dengan menggunakan aplikasi misalnya GeoGebra atau Desmos.



Ayo, Berpikir Kreatif

Berdasarkan definisi fungsi eksponensial,

1. Jika $a = 1$, maka $f(x) = n \times 1^x = n$, maka fungsi tidak lagi menjadi fungsi eksponensial melainkan fungsi konstan $f(x) = n$, dengan n adalah bilangan real. Hal ini terjadi karena jika $a = 1$, maka 1 dipangkatkan berapa pun akan tetap bernilai 1, sehingga fungsi akan berubah menjadi fungsi konstan.
2. Jika $a = 0$, maka fungsi akan berubah menjadi $f(x) = 0$ yang akan memotong sumbu x di $y = 0$ dan bukan lagi menjadi fungsi eksponensial melainkan fungsi linear.



Diferensiasi

Untuk peserta didik yang sulit memahami hal tersebut, guru dapat memberikan ilustrasi dengan menggambarkan grafik fungsi yang baru dengan $a = 1$ dan $a = 0$.

Guru melanjutkan penjelasan tentang fungsi pertumbuhan eksponensial dan peluruhan eksponensial. Guru kembali mengajak peserta didik untuk memeriksa **Eksplorasi 1.3** dan menyampaikan bahwa permasalahan tersebut adalah salah satu permasalahan yang menunjukkan fungsi pertumbuhan eksponensial.



Ayo, Berpikir Kreatif

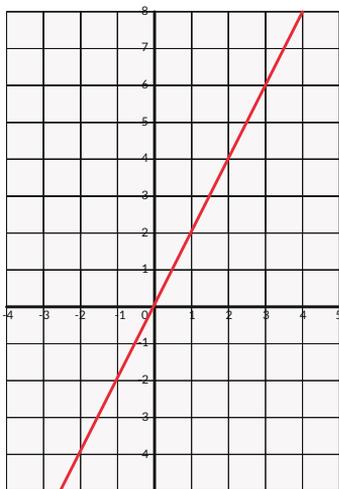
$$f(x) = 2x$$

$$f(x) = x^2$$

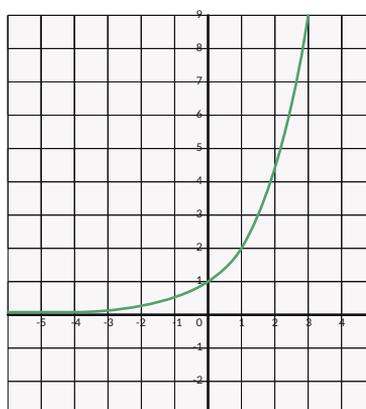
$$f(x) = 2^x$$

1. Gambarlah ketiga grafik fungsi tersebut.

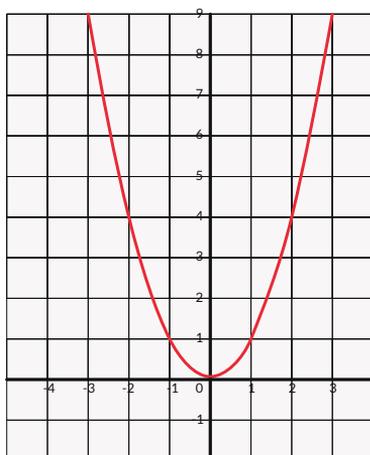
$$f(x) = 2x$$



$$f(x) = 2^x$$



$$f(x) = x^2$$



2. Grafik fungsi $f(x) = 2x$ merupakan grafik fungsi linear, grafik fungsi $f(x) = 2^x$ merupakan grafik fungsi eksponensial, sedangkan grafik fungsi $f(x) = x^2$ merupakan grafik fungsi kuadrat. Perubahan nilai pada ketiga grafik tersebut juga tidaklah sama.
3. Dari ketiga grafik fungsi tersebut, yang paling cepat peningkatan atau pertumbuhannya adalah $f(x) = 2^x$. Dapat diperhatikan bahwa setiap perubahan nilai x memberikan perubahan nilai $f(x)$ yang signifikan dibandingkan dengan grafik fungsi linear dan kuadrat.

1. Pertumbuhan Eksponensial

Guru kemudian melanjutkan penjelasan mengenai pertumbuhan eksponensial dengan merujuk pada kurva $f(x) = 3^x$ pada **Gambar 1.3** di Buku Siswa. Penjelasan kemudian dilanjutkan dengan penjelasan mengenai definisi fungsi pertumbuhan eksponen. Selanjutnya guru menjabarkan contoh yang disajikan pada **Contoh 3** dan **Contoh 4** serta dapat memberikan contoh lain dari pertumbuhan eksponensial dari sumber yang lainnya.



Ayo, Berpikir Kritis

- Jika banyak bakteri di awal adalah 50, maka pertumbuhan bakterinya dimodelkan dengan fungsi $f(x) = 50 \cdot (2^x)$.
- Jika banyak bakteri di awal adalah 100, maka pertumbuhan bakterinya dimodelkan dengan fungsi $f(x) = 100 \cdot (2^x)$.
- Jika banyak bakteri di awal adalah 200, maka pertumbuhan bakterinya dimodelkan dengan fungsi $f(x) = 200 \cdot (2^x)$.



Ayo, Berdiskusi

Minta peserta didik untuk mendiskusikan jawaban mereka pada kegiatan **Ayo Berpikir Kritis** di atas. Jika ada jawaban yang berbeda, guru memfasilitasi peserta didik untuk mendiskusikan jawabannya sampai memperoleh jawaban yang tepat.

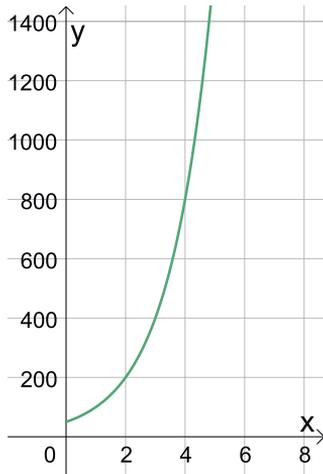
Kunci Jawaban Latihan 1.2

1. Jumlah bakteri E. coli di awal adalah 50 bakteri dan membelah menjadi dua setiap 15 menit.

a. Tabel Pertumbuhan Bakteri

| | | | | | | |
|-----------------------------|----|-----|-----|-----|-----|-------|
| Fase Pertumbuhan (15 menit) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Banyak bakteri | 50 | 100 | 200 | 400 | 800 | 1.600 |

Gambar grafik fungsinya adalah sebagai berikut:



- b. Fungsi tersebut digambarkan dalam fungsi $f(x)=50.(2^x)$
 c. Setelah 3 jam pertama berarti fase pertumbuhan bakteri berada pada fase ke-12 (bakteri membelah setiap 15 menit).

Banyak bakteri adalah:

$$f(x) = 50.(2^{12})$$

$$f(x) = 50 \times 4.096$$

$$f(x) = 204.800$$

Setelah 4 jam pertama berarti fase pertumbuhan bakteri berada pada fase ke-16 (bakteri membelah setiap 15 menit).

Banyak bakteri adalah:

$$f(x) = 50.(2^{16})$$

$$f(x) = 50 \times 65.536$$

$$f(x) = 3.276.800$$

2. Banyak kasus HIV-AIDS pada tahun 2015 adalah 36.000.000 jiwa.
 Peningkatan tahunan adalah 2%

Tabel Peningkatan Kasus HIV-AIDS

| Tahun ke-n | Banyak kasus |
|------------|---|
| 0 | 36.000.000 |
| 1 | $36.000.000 + 2\% \times 36.000.000 = 36.720.000$ |
| 2 | $36.720.000 + 2\% \times 36.720.000 = 37.454.400$ |

| Tahun ke-n | Banyak kasus |
|------------|---|
| 3 | $37.454.400 + 2\% \times 37.454.400 = 38.203.488$ |
| ... | ... |

Jika dilanjutkan penghitungan tersebut, permasalahan tersebut berbentuk fungsi eksponensial. Model matematika yang tepat untuk menentukan banyak kasus HIV AIDS dengan pertumbuhan 2% pada tahun ke- x adalah

$$f(x) = 36.000.000 \times (1+0,02)^x$$

Misalkan kasus awal dihitung dari tahun 2015, maka kasus pada tahun 2020 dihitung sebagai kasus ke-5.

Banyak kasus yang terjadi pada tahun 2020 adalah

$$f(5) = 36.000.000 \times (1+0,02)^5$$

$$f(5) = 36.000.000 \times 1,1040808$$

$$f(5) = 39.746.908,9$$

Banyaknya penderita pastinya merupakan bilangan cacah. Oleh karenanya nilai ini harus dibulatkan.



Ayo, Berdiskusi

Contoh penerapan pertumbuhan eksponensial yang lainnya misalnya pada konteks bunga majemuk, pertumbuhan suatu populasi tertentu, dan sebagainya.

Konfirmasi jawaban peserta didik seperti apa pertumbuhan eksponensial yang terjadi pada contoh yang mereka kemukakan.

2. Peluruhan Eksponensial

Kegiatan dilanjutkan dengan menjelaskan tentang fungsi peluruhan eksponensial. Guru menjelaskan dan menggambarkan bagaimana fungsi peluruhan eksponen terjadi dan mengajak peserta didik untuk mendiskusikan perbedaan fungsi pertumbuhan eksponen dan peluruhan eksponen. Kegiatan kemudian dilanjutkan dengan memberikan **Contoh 5** kepada peserta didik.

Pada **Contoh 5**, ajak peserta didik untuk mendiskusikan mengapa fungsi yang digunakan untuk permasalahan tersebut adalah $f(x) = 50 \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Jika peserta didik mengalami kesulitan, maka guru dapat membimbing peserta didik kembali untuk melihat peluruhan dosis obat pada setiap fasenya.



Ayo, Berpikir Kreatif

Waktu yang dibutuhkan sehingga dosis obat tersebut masih ada di dalam tubuh pasien kurang dari 0,1 mikrogram. Peserta didik dapat memprediksi dengan mencoba-coba hingga diperoleh dosis kurang dari 0,1 miligram seperti berikut ini.

$$f(0) = 50$$

$$f(1) = \frac{1}{2} \times 50 = 25$$

$$f(2) = \frac{1}{2} \times 25 = 12,5$$

$$f(3) = \frac{1}{2} \times 12,5 = 6,25$$

$$f(4) = \frac{1}{2} \times 6,25 = 3,125$$

$$f(5) = \frac{1}{2} \times 3,125 = 1,5625$$

$$f(6) = \frac{1}{2} \times 1,5625 = 0,78125$$

$$f(7) = \frac{1}{2} \times 0,78125 = 0,391$$

$$f(8) = \frac{1}{2} \times 0,391 = 0,195$$

$$f(9) = \frac{1}{2} \times 0,195 = 0,098$$

Dengan memprediksi seperti cara di atas maka diperoleh bahwa setelah 9 jam maka dosis obat sudah kurang dari 0,1 mg.

Sebagai alternatif, fungsi logaritma sebenarnya dapat digunakan untuk memudahkan penghitungan, tetapi konsep tersebut baru akan diajarkan pada pertemuan selanjutnya.



Diferensiasi

Bagi peserta didik yang kecepatan belajarnya tinggi (*advanced*), mereka diminta mengerjakan **Latihan 1.3** tanpa bantuan, dan memikirkan pertanyaan-pertanyaan yang dapat diajukan. Pada saat yang sama, guru dapat mendampingi peserta didik yang mengalami kesulitan.

Kunci Jawaban Latihan 1.3

1. Zat yang disuntikkan ke dalam tubuh pasien adalah 200 mg.

Zat yang dikeluarkan setiap jamnya adalah 50%.

Banyak zat yang masih tersisa di dalam tubuh pasien adalah:

$$f(x) = 200 \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Setelah 5 jam, maka banyak zat yang tersisa di dalam tubuh pasien adalah:

$$f(5) = 200 \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$f(5) = 200 \times 0,03125$$

$$f(5) = 6,25$$

Sehingga banyaknya zat yang masih tersisa di dalam tubuh pasien adalah 6,25 mg.

2. Massa radiokatif adalah 0,3 kg pada jam 10.00 pagi.

Tingkat peluruhan 15% per jam.

Jadi massa radioaktif yang tersisa adalah $100\% - 15\% = 85\%$

Massa radiokatif yang tersisa dituliskan dalam fungsi $f(x) = 0,3(0,85)^x$

Setelah 8 jam, maka banyak zat yang dikeluarkan dari dalam tubuh pasien adalah:

$$f(8) = 0,3 \times (0,85)^8$$

$$f(8) = 0,3 \times 0,2724$$

$$f(8) = 0,08172 \text{ kg}$$

$$f(8) = 81,72 \text{ gram}$$

Sehingga banyaknya zat yang masih tersisa di dalam tubuh pasien adalah $300 - 81,72 = 218,28$ gram.

3. Ketinggian awal bola basket adalah 3 m.

Tinggi lambungan bola adalah $\frac{3}{5}$ dari tinggi sebelumnya.

- a. Untuk memudahkan, buatlah tabel yang membantu menentukan tinggi lambungan bola pada fase selanjutnya. Misalnya satuan tinggi bola diubah ke dalam cm menjadi 300 cm.

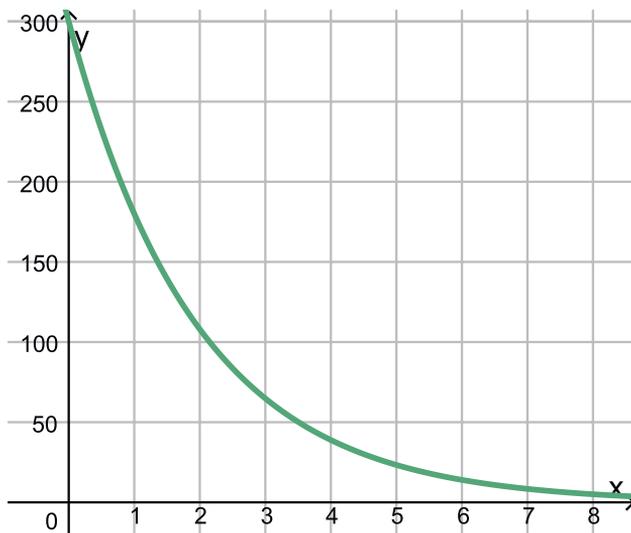
| | | | | | | |
|-------------------------|-----|-----|-----|------|-------|--------|
| Fase lambungan | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Tinggi bola (cm) | 300 | 180 | 108 | 64,8 | 38,88 | 23,328 |

Berdasarkan data di atas, maka fungsi yang tepat untuk menggambarkan perubahan ketinggian lambungan bola adalah

$$f(x) = 300 \left(\frac{3}{5}\right)^x$$

Grafik fungsi perubahan ketinggian lambungan bola hingga akhirnya menyentuh tanah adalah sebagai berikut.

Bimbing peserta didik untuk menggambarkan grafik fungsi tersebut dengan menggunakan aplikasi seperti GeoGebra atau jika memang tidak memungkinkan peserta didik dapat menggambarkan secara manual di selembar kertas.



- b. Untuk menentukan pada lambungan ke berapa bola akan berhenti melambung, peserta didik dapat menguji coba setiap fase lambungan hingga menentukan bahwa pada lambungan tersebut bola benar-benar berhenti melambung.

Hasil yang diperoleh adalah sebagai berikut.

| Fase | Tinggi |
|------|----------|
| 0 | 300 |
| 1 | 180 |
| 2 | 108 |
| 3 | 64,8 |
| 4 | 38,88 |
| 5 | 23,328 |
| 6 | 13,9968 |
| 7 | 8,39808 |
| 8 | 5,038848 |
| 9 | 3,023309 |
| 10 | 1,813985 |
| 11 | 1,088391 |
| 12 | 0,653035 |
| 13 | 0,391821 |
| 14 | 0,235092 |
| 15 | 0,141055 |

Jika diperhatikan, pada lambungan ke-12, ketinggian bola sudah 0,65 cm atau dengan kata lain bola berhenti melambung. Akan tetapi, jika melihat data tersebut pada lambungan ke-10 dengan ketinggian 1,8 cm, kemungkinan bola juga sudah berhenti melambung mengingat massa bola yang tidak memungkinkan untuk melambung kembali.

Ajak peserta didik untuk mendiskusikan hal tersebut. Kapan bola benar-benar berhenti melambung. Untuk memudahkan peserta didik mencari tinggi bola pada setiap fase lambungan, guru dapat mengarahkan peserta didik untuk menggunakan Microsoft Excel.



Penguatan Karakter

Ajak peserta didik untuk merenungkan apakah mereka pernah menjadi sisi penerima kebaikan tanpa syarat dari orang lain. Guru juga dapat meminta peserta didik untuk menjelaskan ke teman sebelahnya mengapa konsep *Pay It Forward* dapat digambarkan dalam bentuk fungsi eksponensial. Apabila dianggap sesuai, tantang peserta didik untuk menuliskan fungsi eksponennya. Terakhir, guru dapat mengajak peserta didik memikirkan contoh pertumbuhan atau peluruhan eksponen lainnya dalam kehidupan sehari-hari.

D. Bentuk Akar



Kriteria Ketercapaian Tujuan Pembelajaran

- Peserta didik mampu menyederhanakan bentuk akar
- Peserta didik mampu mengubah penyebut pecahan yang mengandung bentuk akar dengan benar

1. Hubungan Bilangan Pangkat dan Akar

Pada bagian ini guru menjelaskan hubungan antara bilangan pangkat dan akar. Merujuk pada **Contoh 5** sebelumnya, guru menjelaskan bagaimana hubungan antara akar dan bilangan pangkat. Penjelasan kemudian dilanjutkan dengan memberikan bentuk umum dari bentuk akar. Peserta didik juga diminta untuk mengingat kembali sifat-sifat eksponen yang sudah dipelajari sebelumnya.



Ayo, Berpikir Kritis

Bentuk $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ tidak benar karena misalkan kamu mengambil nilai

$a = 16$ dan $b = 9$, maka diperoleh:

$$\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$$

Peserta didik boleh mengambil bilangan lainnya dan membuktikan bahwa hal tersebut tidak berlaku

2. Merasionalkan Bentuk Akar

Pada bagian ini guru menjelaskan bagaimana merasionalkan bentuk akar dari beberapa bentuk akar yang perlu dirasionalkan. Guru mengajak peserta didik mendiskusikan mengapa bentuk akar tersebut perlu untuk dirasionalkan.



Diferensiasi

Untuk peserta didik yang mengalami kesulitan, guru dapat memberikan contoh yang lebih konkret.



Ayo, Berpikir Kreatif

Coba rasionalkan bentuk-bentuk ini:

$$\frac{c}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}, \frac{c}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}, \frac{c}{a + \sqrt{b}}, \text{ dan } \frac{c}{a - \sqrt{b}}$$

$$\begin{aligned} 1. \quad \frac{c}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} &= \frac{c}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \\ &= \frac{c(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} \\ &= \frac{c(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2} \\ &= \frac{c(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad \frac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} &= \frac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \\
 &= \frac{c(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} \\
 &= \frac{c(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2} \\
 &= \frac{c(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad \frac{c}{a+\sqrt{b}} &= \frac{c}{a+\sqrt{b}} \times \frac{a-\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}} \\
 &= \frac{c(a-\sqrt{b})}{(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})} \\
 &= \frac{c(a-\sqrt{b})}{(a)^2 - (\sqrt{b})^2} \\
 &= \frac{c(a-\sqrt{b})}{a^2 - b}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad \frac{c}{a-\sqrt{b}} &= \frac{c}{a-\sqrt{b}} \times \frac{a+\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}} \\
 &= \frac{c(a+\sqrt{b})}{(a-\sqrt{b})(a+\sqrt{b})} \\
 &= \frac{c(a+\sqrt{b})}{(a)^2 - (\sqrt{b})^2} \\
 &= \frac{c(a+\sqrt{b})}{a^2 - b}
 \end{aligned}$$



Ayo, Berdiskusi

Minta peserta didik untuk saling membandingkan dan mendiskusikan cara yang mereka gunakan masing-masing.

Kunci Jawaban Latihan 1.4

1. Sederhanakan bentuk akar berikut ini.

$$\begin{aligned}
 \text{a. } \left(\frac{8x^5y^{-4}}{16y^{-\frac{1}{4}}} \right)^{\frac{1}{2}} &= \frac{(2^3)^{\frac{1}{2}} (x^5)^{\frac{1}{2}} (y^{-4})^{\frac{1}{2}}}{(2^4)^{\frac{1}{2}} (y^{-\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}}} && \rightarrow = \frac{(x)^{\frac{5}{2}}}{(2)^{\frac{1}{2}} (y)^{\frac{15}{8}}} \\
 &= \frac{(2)^{\frac{3}{2}} (x)^{\frac{5}{2}} (y)^{-2}}{2^2 (y)^{-\frac{1}{8}}} \\
 &= (2)^{\frac{3}{2}-2} (x)^{\frac{5}{2}} (y)^{-2+\frac{1}{8}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b. } (5\sqrt{x^5}) (3\sqrt[3]{x}) &= (5x^{\frac{5}{2}}) (3x^{\frac{1}{3}}) \\
 &= 15x^{\frac{5}{2}+\frac{1}{3}} \\
 &= 15x^{\frac{15+2}{6}} \\
 &= 15x^{\frac{17}{6}} \\
 &= 15x^2\sqrt[6]{x^5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c. } \left(\frac{p^5q^{-10}}{p^5q^{-4}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{p^{\frac{1}{4}}q^{-\frac{1}{2}}}{p^{-\frac{1}{2}}q^{-\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\frac{p^{(5-\frac{1}{2})}q^{-10-\frac{1}{2}}}{p^{(5-\frac{1}{2})}q^{-4-\frac{1}{2}}} \right) \left(\frac{p^{(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2})}q^{(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2})}}{p^{(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2})}q^{(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2})}} \right) \\
 &= \left(\frac{p^{\frac{5}{2}}q^{-5}}{p^{\frac{5}{2}}q^{-2}} \right) \left(\frac{p^{\frac{1}{8}}q^{-\frac{1}{4}}}{p^{-\frac{1}{4}}q^{-\frac{1}{4}}} \right) \\
 &= \left(p^{\frac{5}{2}-\frac{5}{2}}q^{-5-(-2)} \right) \left(p^{\frac{1}{8}-(-\frac{1}{4})}q^{-\frac{1}{4}-(-\frac{1}{4})} \right) \\
 &= (p^0q^{-3}) \left(p^{\frac{1+2}{8}}q^0 \right) \\
 &= (1 \cdot q^{-3}) \left(p^{\frac{3}{8}} \cdot 1 \right) \\
 &= \frac{p^{\frac{3}{8}}}{q^3} \\
 &= \frac{\sqrt[8]{p^3}}{q^3}
 \end{aligned}$$

2. Rasionalkan bentuk berikut ini.

$$\begin{aligned} \text{a. } \frac{2}{\sqrt[4]{b^3}} &= \frac{2}{\sqrt[4]{b^3}} \times \frac{\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{b}} \\ &= \frac{2\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{b^4}} \\ &= \frac{2\sqrt[4]{b}}{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \frac{2}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} &= \frac{2}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} - \sqrt{5}} \\ &= \frac{2(\sqrt{3} - \sqrt{5})}{3 - 5} \\ &= \frac{2(\sqrt{3} - \sqrt{5})}{-2} \\ &= -(\sqrt{3} - \sqrt{5}) \\ &= \sqrt{5} - \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } \frac{m}{\sqrt{m} + n} &= \frac{m}{\sqrt{m} + n} \times \frac{\sqrt{m} - n}{\sqrt{m} - n} \\ &= \frac{m(\sqrt{m} - n)}{m - n^2} \end{aligned}$$

Banyak sekali contoh penerapan fungsi eksponensial dalam kehidupan sehari-hari. Beberapa di antaranya adalah penggunaan dosis obat, penghitungan bunga majemuk, pertumbuhan, peluruhan zat radioaktif, dan sebagainya.

Ajak peserta didik untuk mencari tahu pada buku atau situs internet yang menyajikan contoh-contoh fungsi eksponensial dan mendiskusikan temuan mereka. Hal terpenting ialah mereka dapat menjelaskan seperti apa fungsi eksponensial disajikan pada permasalahan atau konteks yang mereka temukan. Diskusi dapat dilakukan secara berkelompok atau diskusi besar di dalam kelas.

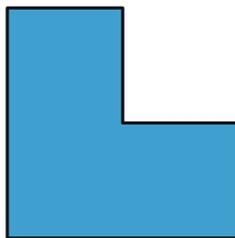
Kunci Jawaban Latihan 1.5

1. Selesaikanlah:

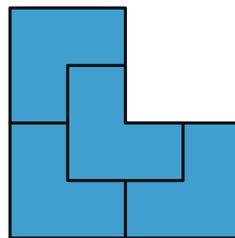
$$\begin{aligned} \left(\frac{3a^{-2}b}{a^2b^5c^{-1}} \right)^{-3} &= \frac{3^{-3}a^6b^{-3}}{a^{-6}b^{-15}c^3} \\ &= \frac{a^{6-(-6)}b^{-3-(-15)}}{3^3c^3} \\ &= \frac{a^{12}b^{12}}{27c^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \sqrt[3]{\frac{24x^2y^5}{3x^5y^{11}}} &= \left(\frac{24x^2y^5}{3x^5y^{11}} \right)^{\frac{1}{3}} \\ &= (8x^{2-5}y^{5-11})^{\frac{1}{3}} \\ &= (2^3x^{-3}y^{-6})^{\frac{1}{3}} \\ &= (2)^{3 \cdot \frac{1}{3}}(x)^{-3 \cdot \frac{1}{3}}(y)^{-6 \cdot \frac{1}{3}} \\ &= 2x^{-1}y^{-2} \\ &= \frac{2}{xy^2} \end{aligned}$$

3. Sebuah bangun berbentuk seperti di bawah ini. Bangun tersebut kemudian dibagi menjadi 4 bangun yang kongruen.



Tahap 0



Tahap 1

a. Tabel yang Merepresentasikan Banyaknya bangun yang Kongruen di Setiap Tahap

| | | | | | | |
|------------------------------------|---|---|----|----|-----|-----|
| Fase ke- | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
| Banyak Bangun yang Kongruen | 1 | 4 | 16 | 64 | 256 | ... |

Tabel dapat dilanjutkan peserta didik hingga fase yang diinginkan.

- b. Pada setiap fase x , masing-masing bangun berubah menjadi 4 bangun kongruen yang lebih kecil, sehingga model matematika untuk menggambarkan permasalahan:

$$f(x) = 4^x$$

dengan $f(x)$ adalah banyak bangun yang kongruen pada fase ke- x .

- c. Berdasarkan model matematika yang diperoleh, didapatkan banyaknya bangun kongruen yang dapat dibuat pada tahap ke-12 adalah

$$f(12) = 4^{12} = 16.777.216$$

4. Fraktal tersusun seperti gambar di bawah ini.



- a. Tabel yang Merepresentasikan Banyaknya Segmen Garis yang Terbentuk di Setiap Fase

| | | | | | | |
|--|---|---|----|----|-----|-----|
| Fase ke- | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
| Banyak segmen garis yang dihasilkan | 1 | 4 | 16 | 64 | 256 | ... |

- b. Segmen garis yang dihasilkan setelah 20 tahap pertama.
 Pada setiap fase, masing-masing ruas garis berubah menjadi 4 ruas garis lain yang lebih pendek, sehingga model matematika untuk menggambarkan permasalahan

$$f(x) = 4^x$$

dengan $f(x)$ adalah banyak segmen garis yang dihasilkan pada fase ke- x .

Berdasarkan model matematika yang diperoleh, didapatkan banyak segmen garis yang dihasilkan setelah 20 tahap pertama adalah:

$$f(20) = 4^{20} = 1.099.511.627.776$$

5. Penjualan tas pada bulan kedua $\frac{3}{4}$ dari penjualan tas pada bulan pertama. Demikian pula pada bulan ketiga, penjualan tas hanya $\frac{3}{4}$ dari bulan kedua dan seterusnya.

a. Banyak tas yang terjual pada bulan kedua: $\frac{3}{4} \times 500 = 375$ buah

Banyak tas yang terjual pada bulan ketiga: $\frac{3}{4} \times 375 = 281,25 \sim 281$ buah.

b. Prediksi penjualan pada bulan ke-10: $\left(\frac{3}{4}\right)^{10} \times 500 = 28,156 \sim 28$ buah.

- c. Untuk memprediksi penjualan kurang dari 10 maka akan dicari nilai n .

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n \times 500 = 10 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1}{50}$$

$$n = {}^{\frac{3}{4}}\log\left(\frac{1}{50}\right)$$

$$n = 13,59$$

Jadi, penjualan akan kurang dari 10 tas terjadi pada bulan ke-13 atau 14.

6. Panjang hipotenusa pada ruang cangkang ke- n

| Ruang Cangkang ke- | Panjang Hipotenusa |
|--------------------|--|
| 1 | $h = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ |
| 2 | $h = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ |
| 3 | $h = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4}$ |
| 4 | $h = \sqrt{(\sqrt{4})^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ |
| ... | ... |
| n | $h = \sqrt{(\sqrt{n})^2 + 1^2} = \sqrt{n+1}$ |

Jadi, panjang hipotenusa pada ruang cangkang ke- n adalah $\sqrt{n+1}$

7. Bilangan satuan dari 7^{123}
Perhatikan polanya.

| 7^n | Satuan |
|-------|--------|
| 7^1 | 7 |
| 7^2 | 9 |
| 7^3 | 3 |
| 7^4 | 1 |
| 7^5 | 7 |
| 7^6 | 9 |
| 7^7 | 3 |
| 7^8 | 1 |

Terlihat hasil angka satuan dari perpangkatan bilangan 7 berulang setiap 4 kali.

Karena $123 \div 4 = 30$ sisa 3, berarti satuan pada 7^{123} akan sama dengan satuan dari 7^3 yaitu 3.

8. Model matematika untuk menggambarkan permasalahan filter cahaya ialah $f(n) = 100(1-0,4)^n$, dengan n ialah banyak filter cahaya yang digunakan.

Sehingga banyak filter cahaya yang dibutuhkan agar intensitas cahaya menjadi kurang dari 5% ialah:

$$5 = 100(1 - 0,4)^n$$

$$5 = 100(0,6)^n$$

$$\frac{5}{100} = (0,6)^n$$

$$n = {}^{0,6}\log \frac{5}{100}$$

$$n = 5,86 \sim 6$$

Jadi, banyak filter yang dibutuhkan adalah 6 filter cahaya.

Kunci Jawaban

Uji Kompetensi

1. Selesaikanlah.

$$\text{a. } \left(\frac{x^{-5}y^4}{xy^3} \right)^{-2} \cdot \left(\frac{x^7y^{-3}}{x^{-4}y^6} \right)^{-\frac{1}{2}}, x \neq 0, y \neq 0$$

$$= \left(\frac{x^{-5(-2)}y^{4(-2)}}{x^{-2}y^{3(-2)}} \right) \left(\frac{x^{7(-\frac{1}{2})}y^{-3(-\frac{1}{2})}}{x^{-4(-\frac{1}{2})}y^{6(-\frac{1}{2})}} \right)$$

$$= \left(\frac{x^{10}y^{-8}}{x^{-2}y^{-6}} \right) \left(\frac{x^{-\frac{7}{2}}y^{\frac{3}{2}}}{x^2y^{-3}} \right)$$

$$= (x^{10+2}y^{-8+6}) (x^{-\frac{7}{2}-2}y^{\frac{3}{2}+3})$$

$$= (x^{12}y^{-2}) (x^{-\frac{7-4}{2}}y^{\frac{3+6}{2}})$$

$$= (x^{12}y^{-2}) (x^{-\frac{11}{2}}y^{\frac{9}{2}})$$

$$= x^{12-\frac{11}{2}}y^{-2+\frac{9}{2}}$$

$$= x^{\frac{24-11}{2}}y^{\frac{-4+9}{2}}$$

$$= x^{\frac{13}{2}}y^{\frac{5}{2}}$$

$$\text{b. } \frac{(m^{10}n^{-2})^3 (m^5n^{-5})^3}{mn}, m \neq 0, n \neq 0$$

$$= \frac{(m^{10(3)}n^{-2(3)}) (m^{5(3)}n^{-5(3)})}{mn}$$

$$= \frac{(m^{30}n^{-6}) (m^{15}n^{-15})}{mn}$$

$$= \frac{m^{30+15}n^{-6-15}}{mn}$$

$$= \frac{m^{45}n^{-21}}{mn}$$

$$= m^{45-1}n^{-21-1}$$

$$= m^{44}n^{-22}$$

$$= \frac{m^{44}}{n^{22}}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c. } & \frac{p+q}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}, p \neq 0, q \neq 0 \\
 &= \frac{p+q}{\sqrt{p}-\sqrt{q}} \times \frac{\sqrt{p}+\sqrt{q}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}} \\
 &= \frac{p+q(\sqrt{p}+\sqrt{q})}{p+\sqrt{pq}-\sqrt{pq}-q} \\
 &= \frac{p+q(\sqrt{p}+\sqrt{q})}{p-q}
 \end{aligned}$$

2. Diketahui:

Banyak bakteri = 500

Pembelahan menjadi 2 terjadi setiap 1 jam.

- a. Fungsi yang menyatakan hubungan antara banyak bakteri setelah jam tertentu adalah $f(x) = 500(2)^x$
- b. Waktu yang dibutuhkan sehingga koloni bakteri tersebut berjumlah 5.000 bakteri adalah:

$$5.000 = 500 \cdot 2^x$$

$$10 = 2^x$$

$$x = {}^2 \log 10$$

$$= 3,32$$

Jadi, waktu yang dibutuhkan sehingga koloni bakteri menjadi 5.000 bakteri adalah 3,32 jam.

- c. Waktu yang dibutuhkan sehingga koloni bakteri tersebut mencapai 100.000 bakteri adalah:

$$100.000 = 500(2)^x$$

$$\frac{100.000}{500} = (2)^x$$

$$200 = (2)^x$$

$$x = {}^2 \log 200$$

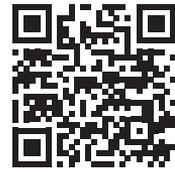
$$x = 7,64$$

Jadi, waktu yang dibutuhkan sehingga koloni bakteri menjadi 100.000 bakteri adalah 7,64 jam.

Pengayaan

Pembahasan bagian pengayaan dapat diakses pada tautan berikut.

<https://buku.kemdikbud.go.id/s/ynx30h>



Refleksi

- Apa itu bilangan eksponen?
Sampel jawaban: bilangan eksponen adalah bilangan yang berbentuk a^n menyatakan hasil kali bilangan a sebanyak n faktor. a adalah bilangan real dan n adalah bilangan bulat positif.
- Seperti apa bentuk fungsi eksponensial?
Sampel jawaban: Sebuah fungsi eksponensial dinyatakan dengan $f(x) = n \times a^x$, di mana a adalah bilangan pokok, $a > 0$, $a \neq 1$, n adalah bilangan real tak nol dan x adalah sebarang bilangan real.
- Apa yang membedakan fungsi pertumbuhan eksponen dan peluruhan eksponen?
Sampel jawaban: fungsi pertumbuhan eksponen menunjukkan tingkat pertumbuhan yang berbanding lurus dengan besarnya nilai kuantitas. Penambahan jumlah kuantitasnya dapat dikatakan signifikan, sedangkan peluruhan eksponensial menggambarkan penurunan secara konsisten pada periode waktu tertentu.

Aktivitas ini dapat dilakukan secara bersamaan dengan melakukan *Think-Pair-Share*, yaitu meminta masing-masing peserta didik memikirkan jawaban pertanyaan refleksi tersebut, kemudian berpasangan saling membagikan jawaban, memodifikasi jawaban sesuai hasil berbagi dengan pasangan, dan kemudian menyampaikan di kelas.

Aktivitas ini juga dapat dilakukan secara mandiri oleh individu peserta didik dengan menuliskan dalam jurnal refleksi mereka jika waktu yang tersedia singkat dan tidak memungkinkan untuk mengadakan diskusi bersama. Guru kemudian dapat mengumpulkan hasil refleksi dan memberikan umpan balik terhadap pemahaman masing-masing peserta didik.

Asesmen Diri

Ajak peserta didik untuk menilai pemahaman mereka di bab pertama ini dengan mengisi asesmen diri. Jelaskan kepada peserta didik bahwa asesmen diri diharapkan dapat melatih mereka agar bisa memonitor tingkat pemahaman mereka saat belajar. Sampaikan bahwa makin terbiasa mereka memonitor pemahaman diri, makin mereka dapat belajar dengan lebih efektif. Apabila kurang paham, dapat bertanya atau mencoba cara lain. Apabila ada pemahaman yang salah, mereka segera menyadari dan mencoba memperbaiki atau bertanya kepada guru maupun peserta didik lain.

Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Republik Indonesia, 2023

**Panduan Guru Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas X
(Edisi Revisi)**

Penulis: Dicky Susanto, dkk.
ISBN: 978-623-118-562-4

Bab

2

Panduan Khusus

Barisan dan Deret

? Apa perbedaan barisan dan deret aritmetika dengan barisan dan deret geometri?

Pendahuluan

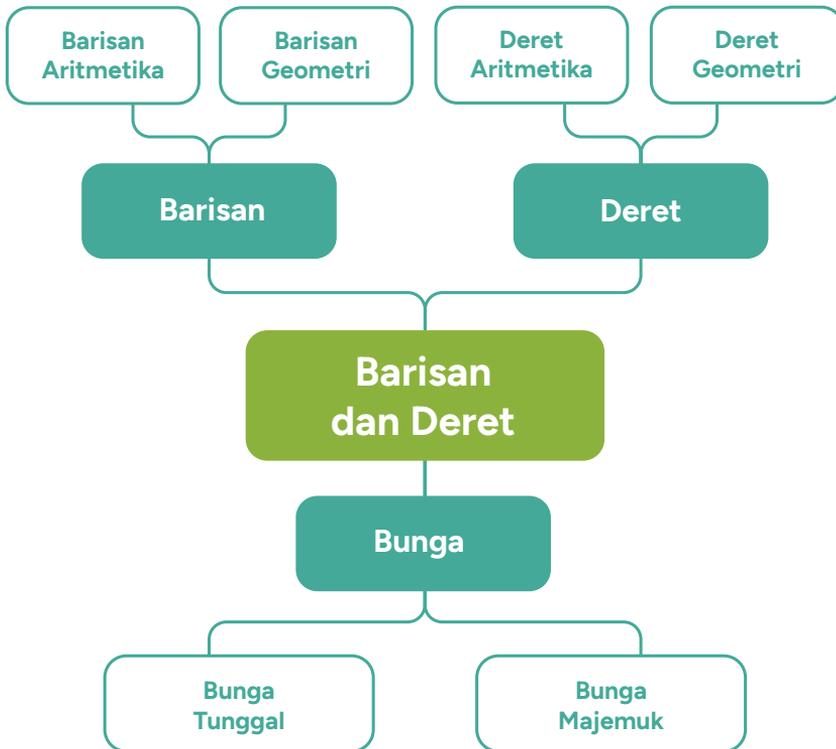
Setelah mempelajari bab ini, peserta didik diharapkan dapat menyelesaikan permasalahan kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan konsep barisan aritmetika dan barisan geometri, konsep deret aritmetika dan deret geometri; serta menggunakan konsep barisan dan deret untuk menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan bunga tunggal dan bunga majemuk.

Untuk memastikan bahwa tujuan pembelajaran telah tercapai, beberapa kriteria berikut dapat digunakan:

- Peserta didik mampu menentukan suku ke- n dari suatu barisan aritmetika
- Peserta didik mampu menentukan suku ke- n dari suatu barisan geometri
- Peserta didik mampu menentukan jumlah n suku pertama dari suatu deret aritmetika
- Peserta didik mampu menentukan jumlah n suku pertama dari suatu deret geometri
- Peserta didik dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan bunga tunggal
- Peserta didik dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan bunga majemuk
- Peserta didik dapat mengidentifikasi masalah yang dapat dimodelkan dengan barisan aritmetika dan barisan geometri
- Peserta didik dapat menyelesaikan masalah yang dapat dimodelkan dengan deret aritmetika dan deret geometri

Pemahaman mengenai barisan dan deret sangat berguna untuk bidang kajian ilmu lain, seperti penghitungan keuangan di bidang ekonomi, perkembangbiakan sel pada kajian penelitian biologi, serta menghitung lintasan pantulan benda pada ilmu fisika.

Peta Materi



Bab ini disarankan diselesaikan dalam 15 JP, namun guru dapat menyesuaikan dengan kondisi satuan pendidikan setempat dengan memperhitungkan keragaman kondisi, potensi, kemampuan individu peserta didik, dan dinamika kelas.

Konsep dan Keterampilan Prasyarat

Untuk mempelajari bab ini, peserta didik diharapkan memiliki pengetahuan awal mengenai pola bilangan. Peserta didik diarahkan untuk mengingat kembali pola bilangan yang telah mereka pelajari di jenjang sebelumnya. Namun demikian, tanpa pengetahuan awal tersebut, peserta didik tetap dapat mempelajari bab ini.

Penyajian Materi Esensial

Pada subbab A, peserta didik akan melakukan beberapa kegiatan eksplorasi. Eksplorasi menyusun meja segi empat untuk membangun pemahaman mengenai barisan aritmetika. Dilanjutkan dengan eksplorasi melipat kertas untuk menemukan kembali konsep mengenai barisan geometri.

Pada subbab B, peserta didik akan melakukan kegiatan eksplorasi terkait membangun pemahaman mengenai deret aritmetika dan deret geometri. Selain itu, kegiatan eksplorasi juga diberikan untuk menggiring peserta didik memahami deret geometri tak hingga konvergen dan divergen. Melalui bab ini juga, peserta didik diharapkan dapat memahami penerapan konsep barisan dan deret bagi kehidupan sehari-hari.

Pada subbab C, peserta didik akan mempelajari bunga tunggal sebagai aplikasi barisan dan deret aritmetika serta bunga majemuk sebagai aplikasi barisan dan deret geometri.

Apersepsi

Perkenalkan bab ini dengan menanyakan kepada peserta didik apa yang ada dalam benak mereka saat mendengar kata Barisan Bilangan. Tampung semua jawaban yang muncul.

Penilaian Sebelum Pembelajaran

Gunakan bagian **Ayo, Mengingat** Kembali mengenai pola bilangan yang sudah dipelajari di SMP. Pertanyaan-pertanyaan berikut dapat digunakan untuk mengaktifkan prapengetahuan peserta didik:

- Apa itu pola bilangan?
- 2 4 6 8 10 apakah termasuk pola bilangan? Jika ya, termasuk pola
- bilangan apa susunan bilangan tersebut?
- Ada berapa suku pola bilangan tersebut?
- Cobalah menyebutkan pola bilangan lain yang terdiri atas 5 suku.

A. Barisan



Kriteria Ketercapaian Tujuan Pembelajaran

- Peserta didik mampu menentukan suku ke- n dari suatu barisan aritmetika
- Peserta didik mampu menentukan suku ke- n dari suatu barisan geometri
- Peserta didik dapat mengidentifikasi masalah yang dapat dimodelkan dengan barisan aritmetika dan barisan geometri



Kebutuhan Sarana Prasarana dan Media Pembelajaran

- Meja belajar peserta didik di kelas
- Kertas berbentuk persegi atau persegi panjang



Apersepsi

Perkenalkan bab ini dengan menanyakan kepada peserta didik apa yang ada dalam benak mereka saat mendengar kata Barisan Bilangan. Tampung semua jawaban yang muncul.

Gunakan bagian **Ayo Mengingat Kembali** mengenai pola bilangan yang sudah dipelajari di SMP. Pertanyaan-pertanyaan berikut dapat digunakan untuk mengaktifkan prapengetahuan peserta didik:

- Apa itu pola bilangan?
- 2 4 6 8 10 apakah termasuk pola bilangan? Jika ya, termasuk pola bilangan apa susunan bilangan tersebut?
- Ada berapa suku pola bilangan tersebut?
- Dapatkah kamu menyebutkan pola bilangan lain yang terdiri atas 5 suku?



Pemanasan

Mulai aktivitas pembelajaran dengan meminta peserta didik menyebutkan contoh lain dari pola bilangan yang berbeda-beda. Kemudian minta peserta didik melakukan **Eksplorasi 2.1**. Peserta didik dapat melakukan eksplorasi sendiri-sendiri terlebih dahulu, kemudian diskusi secara berpasangan atau dalam kelompok, atau langsung bekerja sama berpasangan atau di dalam kelompok.

Eksplorasi 2.1 Banyaknya Kursi



Ayo, Bereksplorasi

Sebelum membahas permasalahan pada **Eksplorasi 2.1**, peserta didik diminta untuk membentuk kelompok yang terdiri atas 4 orang. Lalu, pada bagian ini, peserta didik dapat diminta untuk bereksplorasi dengan meja dan kursi yang ada di kelas. Setelah mencoba langsung, peserta didik diarahkan untuk melengkapi **Tabel 2.1**

1. Tabel 2.1 Banyak Meja dan Kursi

| | | | | | | |
|--------------|---|---|---|----|----|----|
| Banyak meja | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Banyak kursi | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 |

2. **Alternatif jawaban:** Karena jumlah orang membentuk pola bilangan 4 6 8 10 12 14 16 18 20. Angka 20 merupakan suku ke-9. Sehingga meja yang dibutuhkan ada 9.

Materi barisan diawali dengan menggiring peserta didik menjawab pertanyaan singkat terkait kegiatan **Eksplorasi 2.1**.

Berikut alternatif jawaban pada pertanyaan-pertanyaan setelah **Tabel 2.1** (hlm. 38 buku siswa). Terdiri atas berapa suku barisan bilangan tersebut? 4 suku

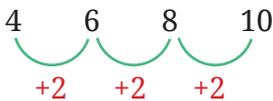
Suku ke-1 dilambangkan dengan $U_1 = 4$
 Suku ke-2 dilambangkan dengan $U_2 = 6$
 Suku ke-3 dilambangkan dengan $U_3 = 8$
 Suku ke-4 dilambangkan dengan $U_4 = 10$

Dari kegiatan **Eksplorasi 2.1**, peserta didik digiring untuk membangun pemahaman bahwa pola bilangan dengan aturan tertentu akan membentuk barisan bilangan.

1. Barisan Aritmetika

Pada bagian ini, peserta didik diberikan pemahaman mengenai barisan aritmetika melalui pertanyaan-pertanyaan singkat. Berikut alternatif jawaban pada pertanyaan-pertanyaan setelah **Tabel 2.1** pada buku siswa.

- Selanjutnya, aturan apa yang ada pada barisan bilangan 4, 6, 8, 10 tersebut? **Suku berikutnya hasil dari suku sebelum ditambah 2.**
- Operasi penghitungan apa yang ada di antara suku-suku pada barisan bilangan di atas? Penjumlahan



- Berapakah beda atau selisih antara dua suku yang berdekatan?
 $U_2 - U_1 = 6 - 4 = 2$
 $U_3 - U_2 = 8 - 6 = 2$
 $U_4 - U_3 = 10 - 8 = 2$
- Apakah beda atau selisih antara dua suku yang berdekatan selalu sama? Iya.

Guru memberikan penegasan bahwa **suatu barisan dengan beda atau selisih antara dua suku berurutan selalu tetap atau konstan disebut BARISAN ARITMETIKA.**



Diferensiasi

Bagi peserta didik yang mengalami kesulitan memahami barisan aritmetika, guru diharapkan dapat menambahkan contoh lain yang merupakan barisan aritmetika dan bukan barisan aritmetika serta meminta peserta didik mengidentifikasi barisan yang merupakan barisan aritmetika.

Eksplorasi

2.2

Gedung Pertunjukan Seni



Ayo, Bereksplorasi

Pada **Eksplorasi 2.2**, peserta didik diajak menemukan kembali rumus menentukan suku ke- n dari barisan aritmetika dengan konteks jumlah kursi pada gedung pertunjukan seni. Peserta didik diminta untuk menentukan jumlah kursi pada baris ke-15. Beri kesempatan terlebih dahulu kepada peserta didik untuk menjawab dengan cara mereka sendiri.

Lalu peserta didik diajak menjawab beberapa pertanyaan yang menggiring ke pemahaman mengenai rumus suku ke- n pada barisan aritmetika.

- Berapa beda atau selisih banyak kursi pada tiap baris? 4 kursi
- Baris ke-1 = 20
- Baris ke-2 = 24 = 20+4
(20 ditambah 4 sebanyak 1 kali) = 20+(1×4)
- Baris ke-3 = 28 = 20+4+4
(20 ditambah 4 sebanyak 2 kali) = 20+(2×4)
- Baris ke-4 = 32 = 20+4+4+4
(20 ditambah 4 sebanyak 3 kali) = 20+(3×4)
- Baris ke-5 = 36 = 20+4+4+4+4
(20 ditambah 4 sebanyak 4 kali) = 20+(4×4)
- Jadi, pada Baris ke-15 = 20 ditambah 4 sebanyak 14 kali = 20+(14 ×4) = 76

Setelah mendapatkan jumlah kursi pada baris ke-15, maka peserta didik diajak menyimpulkan rumus menentukan suku ke- n pada barisan aritmetika adalah $U_n = a + (n - 1) b$.



Ayo, Mencoba

Jika menyelesaikan soal pada contoh dengan menggunakan persamaan 2, maka akan menghasilkan jawaban yang sama.

Setelah pemaparan konsep mengenai menentukan jumlah suku ke- n barisan aritmetika, peserta didik diminta untuk menyimak contoh soal yang ditampilkan pada Buku Siswa. Selanjutnya, untuk memantapkan pemahaman konsep barisan aritmetika, peserta didik diberikan kesempatan untuk mengerjakan soal **Latihan 2.1**.



Diferensiasi

Bagi peserta didik yang kecepatan belajarnya tinggi (*advanced*), minta mereka mengerjakan Latihan tanpa bantuan. Pada saat yang sama, guru dapat mendampingi peserta didik yang mengalami kesulitan.

Kunci Jawaban Latihan 2.1

1. a. $8, 5, 2, -1, \dots, \dots$

Soal di atas adalah barisan aritmetika dengan beda = -3

Dua suku berikutnya: -4, -7

b. $2, 3, 5, 8$

Barisan di atas bukan barisan aritmetika.

Dua suku berikutnya: 12, 17

c. $-15, -11, -7, \dots, \dots$

Soal di atas adalah barisan aritmetika dengan beda = 4

Dua suku berikutnya: -3, 1

d. $10, 8, 4, -2, \dots, \dots$

Barisan di atas bukan barisan aritmetika.

Dua suku berikutnya: -10, -20

2. $b = -2 - 5 = -7$

$$U_n = a + (n - 1)b$$

$$U_{50} = 5 + (50 - 1)(-7)$$

$$U_{50} = -338$$

$$3. \quad U_3 = -4\frac{1}{2} \quad U_8 = -2$$

$$U_3 = a + 2b = -4\frac{1}{2}$$

$$U_8 = a + 7b = -2 \quad -$$

$$-5b = -2\frac{1}{2}$$

$$b = \frac{-2\frac{1}{2}}{-5}$$

$$b = \frac{1}{2}$$

$$a + 2b = -4\frac{1}{2}$$

$$a + 2\left(\frac{1}{2}\right) = -4\frac{1}{2}$$

$$a + 1 = -4\frac{1}{2}$$

$$a = -4\frac{1}{2} - 1$$

$$a = -5\frac{1}{2}$$

$$U_n = a + (n - 1)b$$

$$U_n = -5\frac{1}{2} + (n - 1)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$2U_n = -11 + (n - 1)$$

$$2U_n = n - 12$$

$$U_n = \frac{n}{2} - 6$$

4. Barisan yang dibentuk adalah 10, 20, 30, ... Ini adalah barisan aritmetika dengan $a = 10$, $b = 10$. Maka

$$\begin{aligned} U_n &= a + (n - 1)b \\ &= 10 + (n - 1)10 \\ &= 10n \end{aligned}$$

- a. Setelah sepuluh minggu, artinya $n = 10$ dan

$$\begin{aligned} U_{10} &= 10 \times 10 \\ &= 100 \end{aligned}$$

b. Dalam satu tahun ada 52 minggu, artinya $n = 52$ dan

$$U_{52} = 10 \times 52$$

$$= 520$$

5. Barisan bilangan yang menyatakan banyaknya permen yang diterima oleh teman Ivan adalah 3, 5, 7, ... Ini adalah barisan aritmetika dengan $a = 3, b = 2$. Maka

$$U_n = a + (n - 1)b$$

$$= 3 + (n - 1)2$$

$$= 2n + 1$$

Ditanyakan banyaknya permen yang diterima oleh teman kesepuluh, artinya $n = 10$. Maka

$$U_n = 2n + 1$$

$$= 2 \times 10 + 1$$

$$= 21$$

2. Barisan Geometri

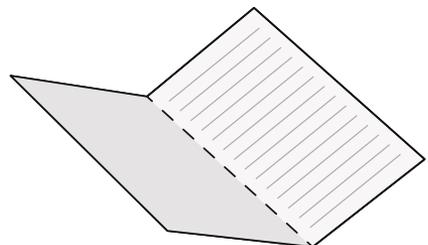
Gunakan bagian **Ayo, Mengingat Kembali** untuk mengingatkan peserta didik tentang konsep rasio. Setelah itu ajak peserta didik mengerjakan **Eksplorasi 2.3**.

Eksplorasi 2.3 Melipat Kertas



Ayo, Bereksplorasi

Pada bagian ini, peserta didik diminta melakukan eksplorasi yaitu melipat kertas dan menentukan banyak bagian sama besar yang terbentuk dari lipatan kertas tersebut seperti yang tampak pada **Gambar 2.1** Selanjutnya peserta didik diminta untuk mengisi **Tabel 2.2**



Gambar 2.1 Kertas Dilipat Satu Kali

Tabel 2.2 Jumlah Lipatan Kertas dan Bagian Sama Besar yang Terbentuk

| | | | | |
|--|----------|----------|----------|-----------|
| Jumlah melipat kertas | 1 kali | 2 kali | 3 kali | 4 kali |
| Banyaknya bagian sama besar yang terbentuk | 2 bagian | 4 bagian | 8 bagian | 16 bagian |

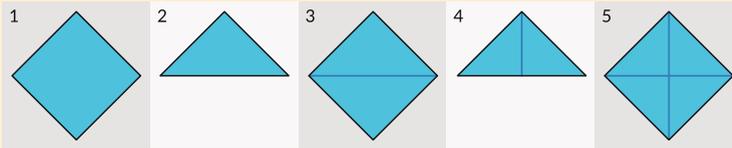
Pada bagian ini, guru dapat meminta peserta didik menampilkan jawaban pada tabel dan menunjukkan hasil lipatan pada kertas.



Ayo, Berpikir Kreatif

Temukan cara melipat kertas yang berbeda. Bagaimana dengan jumlah bagian sama besar yang terbentuk? Apakah sama dengan yang ada pada tabel? Jelaskan.

Alternatif jawaban.



Jika melipat dengan cara seperti pada gambar di atas ini, maka jumlah bagian sama besar yang terbentuk akan sama dengan hasil pada **Tabel 2.2**

Selanjutnya, untuk menanamkan konsep mengenai barisan geometri dan rasio, peserta didik diminta menjawab pertanyaan terkait **Eksplorasi 2.3**.

- Apakah banyaknya bagian yang sama besar pada lipatan kertas membentuk barisan bilangan? **Ya**
- Aturan apa yang terdapat pada barisan bilangan tersebut? **Bilangan sesudah hasil dari bilangan sebelum dikali dengan 2.**
- Operasi hitung apa yang ada di antara suku-suku pada barisan bilangan di atas?

$$\begin{array}{cccc}
 4 & 6 & 8 & 16 \\
 \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \\
 \times 2 & \times 2 & \times 2 &
 \end{array}$$

- Ayo amati rasio antara dua suku yang berdekatan.

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{6}{4} = 2$$

$$\frac{U_3}{U_2} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \neq 2$$

$$\frac{U_3}{U_2} = \frac{8}{4} = 2$$

- Apakah rasio antara dua suku yang berdekatan selalu sama? **Ya.**

Guru memberikan penegasan bahwa **suatu barisan dengan rasio antara dua suku berurutan selalu tetap atau konstan disebut BARISAN GEOMETRI**. Rasio pada barisan geometri dilambangkan dengan r .



Diferensiasi

Bagi peserta didik yang mengalami kesulitan memahami barisan geometri, guru diharapkan dapat menambahkan contoh lain yang merupakan barisan aritmetika dan barisan geometri serta meminta peserta didik mengidentifikasi barisan tersebut bersama dengan teman kelompoknya.

Eksplorasi 2.4 Pembelahan Bakteri

Pada bagian ini, peserta didik diminta untuk menentukan jumlah bakteri setelah membelah selama 20 jam. Beri kesempatan kepada peserta didik untuk menjawab dengan cara mereka sendiri. Setelah itu, peserta didik diajak menjawab pertanyaan berikut untuk membangun pemahaman mengenai rumus menentukan suku ke- n barisan geometri.

- Suku pertama pada permasalahan di atas adalah **2**
- Tiap dua jam, membelah menjadi **3**, maka rasio pada barisan di atas adalah **3**

Dalam 20 jam, terjadi pembelahan sebanyak $20 \text{ jam} : 2 \text{ jam} = 10$ kali $\rightarrow n = 10$.

$$U_{10} = \dots$$

$$U_1 = 2$$

$$U_2 = 2 \times 3 \quad (2 \text{ dikali } 3 \text{ sebanyak } 1 \text{ kali}) = 2 \times 3^1$$

$$U_3 = 2 \times 3 \times 3 \quad (2 \text{ dikali } 3 \text{ sebanyak } 2 \text{ kali}) = 2 \times 3^2$$

$$U_4 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \quad (2 \text{ dikali } 3 \text{ sebanyak } 3 \text{ kali}) = 2 \times 3^3$$

$$U_5 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \quad (2 \text{ dikali } 3 \text{ sebanyak } 4 \text{ kali}) = 2 \times 3^4$$

$U_{10} = 2$ dikali 3 sebanyak 9 kali

$$U_{10} = 2 \times 3^9$$

Setelah mendapatkan jumlah bakteri setelah pembelahan selama 20 jam, maka peserta didik diajak menyimpulkan rumus menentukan suku ke- n pada barisan geometri adalah $U_n = a \cdot r^{n-1}$

Setelah uraian konsep mengenai menentukan suku ke- n barisan geometri, peserta didik diminta untuk menyimak contoh soal yang ditampilkan pada Buku Siswa. Selanjutnya, untuk memantapkan pemahaman konsep barisan geometri, peserta didik diberikan kesempatan untuk mengerjakan soal **Latihan 2.2**.

Kunci Jawaban Latihan 2.2

1. a. $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots, \dots$

Soal di atas adalah barisan geometri, karena memiliki rasio = 2.

Dua suku berikutnya: 1, 2

b. 25, 5, 1, ..., ...

Soal di atas adalah barisan geometri dengan rasio = $\frac{1}{5}$

Dua suku berikutnya: $\frac{1}{5}, \frac{1}{25}$

c. Bukan barisan geometri

$$U_2 = U_1 \times 1$$

$$U_3 = U_2 \times 2$$

$$U_4 = U_3 \times 3$$

$$U_5 = U_4 \times 4 = 12 \times 4 = 48$$

$$U_6 = U_5 \times 5 = 48 \times 5 = 240$$

Dua suku berikutnya: 48, 240

d. Bukan barisan geometri, rasio = 1

Dua suku berikutnya: 3, 3

$$2. \quad r = \frac{32}{64} = \frac{1}{2}$$

$$U_n = ar^{n-1}$$

$$U_{10} = 64 \left(\frac{1}{2}\right)^{9-1}$$

$$U_{10} = 2^6 \left(\frac{1}{2}\right)^8$$

$$U_{10} = 2^6 \left(\frac{1}{2^8}\right)$$

$$U_{10} = 2^6 \left(\frac{1}{2^6 \cdot 2^2}\right)$$

$$U_{10} = \frac{1}{2^2}$$

$$U_{10} = \frac{1}{4}$$

$$3. \quad U_2 = 80$$

$$ar = 80 \dots \text{(persamaan 1)}$$

$$U_6 = 5$$

$$ar^5 = 5 \dots \text{(persamaan 2)}$$

Substitusi persamaan 1 ke persamaan 2

$$ar^5 = 5$$

$$ar \cdot r^4 = 5$$

$$80 \cdot r^4 = 5$$

$$r^4 = \frac{5}{80}$$

$$r^4 = \frac{1}{16}$$

$$r = \frac{1}{2}$$

$$ar = 80$$

$$a \cdot \frac{1}{2} = 80$$

$$a = 160$$

$$U_3 = ar^2 = 160 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 40$$

Jadi, tiga suku pertama adalah 160, 80, dan 40.

4. Barisan yang menyatakan banyaknya orang yang menerima foto setiap harinya adalah 3, 9, 27, Ini adalah barisan geometri dengan

$$\begin{aligned} U_n &= a \cdot r^{n-1} \\ &= 3 \cdot 3^{n-1} \end{aligned}$$

$a = 3, r = 3$ maka $U_n = 3^n$. Ditanyakan pada hari keenam, artinya $n = 6$ dan $U_6 = 3^6 = 729$.

5. Barisan yang menyatakan banyaknya sel dalam proses pembelahan sel adalah 1, 2, 4, Ini adalah barisan geometri dengan $a = 1, r = 2$

$$\begin{aligned} U_n &= a \cdot r^{n-1} \\ &= 1 \cdot 2^{n-1} \\ &= 2^{n-1} \end{aligned}$$

Ditanyakan pada tahap ke-20, artinya $n = 20$ dan $U_{20} = 2^{19} = 524.288$.



Ayo, Berpikir Kreatif

Alternatif jawaban

Contoh barisan aritmetika dalam kehidupan sehari-hari:

Seorang peserta didik menabung di koperasi sekolah. Bulan pertama menabung Rp6.000,00, bulan kedua Rp7.000,00, bulan ketiga Rp8.000,00, bulan keempat Rp9.000,00, dan seterusnya. Maka untuk menghitung jumlah uang yang ditabung pada bulan ke-10 dapat ditentukan dengan menggunakan konsep barisan aritmetika.



Ayo, Berpikir Kritis

Alternatif jawaban:

Jika $r > 0$ maka tanda U_n selalu tetap.

Jika $a > 0$ maka $U_n > 0$ untuk semua nilai n .

Jika $a < 0$ maka $U_n < 0$ untuk semua nilai n .

Jika $r < 0$ maka tanda U_n bergantian positif dan negatif,

untuk $a > 0$ maka $U_n > 0$ untuk n ganjil dan $U_n < 0$ untuk n genap.

untuk $a < 0$ maka $U_n < 0$ untuk n ganjil dan $U_n > 0$ untuk n genap.



Ayo, Berefleksi

Tutup pembelajaran dengan meminta peserta didik melakukan refleksi terhadap apa yang sudah mereka pelajari dengan menjawab pertanyaan refleksi.

B. Deret



Kriteria Ketercapaian Tujuan Pembelajaran

- Peserta didik mampu menentukan jumlah n suku pertama dari suatu deret aritmetika
- Peserta didik mampu menentukan jumlah n suku pertama dari suatu deret geometri
- Peserta didik dapat menyelesaikan masalah yang dapat dimodelkan dengan deret aritmetika dan deret geometri



Apersepsi

Perkenalkan bab ini dengan menanyakan kepada peserta didik kapan konsep DERET BILANGAN muncul di dalam kehidupan mereka sehari-hari. Setelah itu ajak peserta didik memikirkan bagaimana menghitung jumlah bilangan-bilangan dalam sebuah barisan bilangan. Beri tahu peserta didik bahwa mereka akan mencoba mendapatkan jawaban terhadap pertanyaan ini selama pembelajaran subbab mengenai DERET.

Gunakan bagian **Ayo, Mengingat Kembali** mengenai barisan bilangan yang sudah dipelajari pada subbab sebelumnya. Pertanyaan-pertanyaan berikut dapat digunakan untuk mengaktifkan prapengetahuan peserta didik:

- Apa itu barisan bilangan?
- $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ apakah termasuk barisan bilangan? Jika ya, apakah bilangan tersebut membentuk barisan aritmetika atau barisan geometri?
- Sebutkan contoh barisan aritmetika dan barisan geometri!

Eksplorasi 2.5 Jabat Tangan



Ayo, Bereksplorasi

Sebelum mulai kegiatan eksplorasi, bentuk kelompok yang terdiri atas 5-6 orang. Peserta didik diminta untuk bereksplorasi dengan melakukan jabat tangan bersama teman satu kelompok. Selanjutnya peserta didik diarahkan untuk menjawab pertanyaan mengenai banyak jabat tangan yang terjadi.



Ayo, Berdiskusi

- Jika ada 2 orang, berapa banyak jabat tangan yang terjadi? **1**
- Jika ada 3 orang, berapa banyak jabat tangan yang terjadi? **3**
- Jika ada 4 orang, berapa banyak jabat tangan yang terjadi? **6**
- Berapa total peserta didik dalam kelompok, dan berapa banyak jabat tangan yang terjadi? **5 peserta didik**. Banyak jabat tangan yang terjadi adalah **10**.

Bagaimana kalian mengetahuinya? **Kami mencoba jabat tangan di semua anggota kelompok dan menghitung banyak jabat tangan sebanyak 10 kali.**

Pastikan peserta didik paham bahwa setiap pasangan berjabat tangan tepat satu kali. Artinya, jika A sudah berjabat tangan dengan B, maka B tidak dihitung berjabat tangan dengan A lagi, karena jabat tangan A dengan B adalah kejadian yang sama dengan jabat tangan B dengan A.



Ayo, Berpikir Kritis

Apakah banyak jabat tangan di atas membentuk barisan? Jelaskan jawabanmu.

Alternatif jawaban:

Banyak jabat tangan tidak membentuk barisan aritmetika maupun geometri, karena barisan tersebut tidak mengandung beda atau rasio yang tetap.

Dari **Eksplorasi 2.5**, banyak jabat tangan yang terjadi dapat dinyatakan sebagai berikut.

Tabel 2.3 Banyak Jabat Tangan yang Terjadi di Kelas

| Banyaknya Orang yang Hadir | Banyak Jabat Tangan | Uraian dari Banyak Jabat Tangan |
|----------------------------|---------------------|---------------------------------|
| Dua orang | 1 | 1 |
| Tiga orang | 3 | 1 + 2 |
| Empat orang | 6 | 1 + 2 + 3 |
| Lima orang | 10 | 1 + 2 + 3 + 4 |

- Apakah uraian dari jumlah jabat tangan merupakan bentuk penjumlahan dari barisan bilangan? **Ya**

Guru memberikan penegasan bahwa bentuk penjumlahan dari barisan bilangan akan membentuk deret bilangan.

1. Deret Aritmetika

Guru menyampaikan cerita tentang Carl Friedrich Gauss yang memecahkan soal terkait penjumlahan bilangan 1 – 100.

Setelah itu, peserta didik diajak mencermati kembali deret bilangan tersebut.

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 98 + 99 + 100 = \dots$$

- Apakah bilangan pada deret di atas membentuk barisan? **Ya**
- Barisan apakah yang dibentuk dari suku-suku pada deret di atas? **Barisan aritmetika.**

Guru memberikan penegasan bahwa **suatu deret yang diperoleh dari menjumlahkan suku-suku pada barisan aritmetika adalah deret aritmetika.**

Selanjutnya, guru menggiring peserta didik untuk memahami bagaimana menemukan kembali rumus jumlah n suku pertama deret aritmetika.

2. Deret Geometri

Eksplorasi 2.6 Jumlah Pasien Terinfeksi Covid-19



Ayo, Bereksplorasi

Guru mengarahkan peserta didik untuk memahami rumus jumlah n suku pertama deret geometri melalui **Eksplorasi 2.6**. Diawali dengan menjawab pertanyaan terkait dengan data pada **Tabel 2.4**.

- Apakah jumlah pasien membentuk barisan bilangan? **Ya.**
- Berapa beda atau rasio dari barisan di atas? **Rasio = 3**
- Terdiri atas berapa suku barisan tersebut? **Terdiri atas 5 suku.**



Ayo, Bekerja Sama

Tabel 2.4 Proses Menemukan Kembali Rumus Jumlah Deret Geometri

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---------------------------------|---|---------------------------------|
| S_2 : jumlah pasien dua bulan pertama | $S_2 = 4 + 12 = 16$ | $S_2 = \frac{36 - 4}{3 - 1} = \frac{32}{2} = 16$ | $S_2 = \frac{U_3 - U_1}{r - 1}$ |
| S_3 : jumlah pasien tiga bulan pertama | $S_3 = 4 + 12 + 36 = 52$ | $S_3 = \frac{108 - 4}{3 - 1} = \frac{104}{2} = 52$ | $S_3 = \frac{U_4 - U_1}{r - 1}$ |
| S_4 : jumlah pasien empat bulan pertama | $S_4 = 4 + 12 + 36 + 108 = 160$ | $S_4 = \frac{324 - 4}{3 - 1} = \frac{320}{2} = 160$ | $S_4 = \frac{U_5 - U_1}{r - 1}$ |

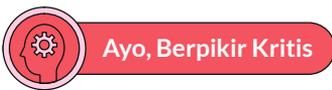
Dari **Tabel 2.5** guru membimbing peserta didik dalam menemukan kembali rumus jumlah n suku pertama deret geometri.

Setelah penjabaran konsep mengenai menentukan jumlah n suku pertama deret aritmetika dan geometri, peserta didik diminta untuk menyimak contoh soal yang ditampilkan pada Buku Siswa. Selanjutnya, untuk memantapkan pemahaman konsep deret bilangan, peserta didik diberikan kesempatan untuk mengerjakan soal **Latihan 2.3**.

Perhatikan bahwa rumus deret geometri yang diberikan pada Buku Siswa berbentuk $S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$ untuk $r \neq 1$.

Ada referensi yang menuliskan bentuk berbeda, yaitu $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$. Kedua bentuk ini pada dasarnya sama. Bedanya, untuk nilai $r < 1$ maka baik pembilang maupun penyebut pada $S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$ bernilai negatif, sedangkan pada $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ bernilai positif, tetapi hasilnya sama.

Umumnya, $S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$ digunakan untuk nilai $|r| > 1$ sedangkan $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ digunakan untuk nilai $|r| < 1$ sehingga nilai pembilang maupun penyebut selalu positif.



Ayo, Berpikir Kritis

Jika $r = 1$, bentuk barisan geometrinya menjadi: $U_n = ar^{n-1} = a$
 a, a, a, \dots, a atau $U_n = ar^{n-1} = a$ dan jumlah deret geometrinya adalah

$$\begin{aligned} S_n &= a + a + \dots + a \\ &= n \times a \\ &= an \end{aligned}$$

Kunci Jawaban Latihan 2.3

- Jumlah bilangan kelipatan 4 di antara 10 – 99:

$$12 + 16 + \dots + 96$$

$$a = 12 \qquad b = 4$$

$$U_n = 96$$

$$a + (n - 1)b = 96$$

$$12 + (n - 1)4 = 96$$

$$12 + 4n - 4 = 96$$

$$8 + 4n = 96$$

$$4n = 88$$

$$n = 22$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)$$

$$S_{22} = \frac{22}{2}(12 + 96) = 11(108) = 1.188$$

2. $a = 9$

$$\begin{aligned}
 r &= 3 \\
 S_n &= 9.837 \\
 9.837 &= \frac{9(3^n - 1)}{3 - 1} \\
 9.837 &= \frac{9(3^n - 1)}{2} \\
 19.674 &= 9(3^n - 1) \\
 2.186 &= (3^n - 1) \\
 2.187 &= 3^n \\
 n &= 13
 \end{aligned}$$

3. $\frac{3}{2} + 3 + 6 + 12 + \dots + Y = \frac{762}{4}$

$$a = \frac{3}{2} \qquad r = \frac{6}{3} = 2$$

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \\
 \frac{762}{4} &= \frac{\frac{3}{2}(r^n - 1)}{2 - 1} \\
 \frac{762}{4} &= \frac{3}{2}(r^n - 1) \\
 1.524 &= 12(2^n - 1) \\
 127 &= 2^n - 1 \\
 128 &= 2^n \\
 n &= 7
 \end{aligned}$$

$$Y = U_7 = ar^6 = \frac{3}{2} \cdot 2^6 = 3 \cdot 2^5 = 96$$

4. Barisan permen yang didapat teman-teman Vina: 2, 5, 8, . . . yang merupakan barisan aritmetika. Permen yang harus Vina siapkan adalah jumlah suku-suku pada barisan ini, yang merupakan deret aritmetika dengan $a = 2$, $b = 3$, $n = 7$. Untuk ketujuh temannya, Vina harus menyiapkan permen sebanyak

$$\begin{aligned}
 S_7 &= \frac{n}{2}(U_1 + U_7) \\
 &= \frac{7}{2}(2 + 2 + 6 \times 3) \\
 &= \frac{7 \times 22}{2} \\
 &= 77
 \end{aligned}$$

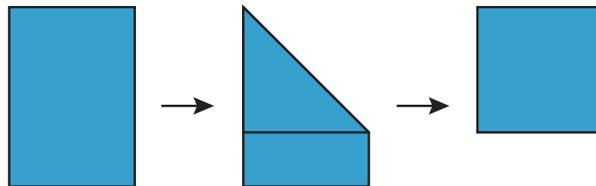
5. Barisan yang menyatakan banyaknya orang baru yang menerima foto tiap hari adalah 2, 4, 8, ... yang merupakan barisan geometri. Banyaknya orang yang melihat foto adalah jumlah dari suku-suku pada barisan ini, ditambah Dani sendiri sehingga deretnya adalah $1 + 2 + 4 + 8 + \dots$ yang merupakan deret geometri dengan $a = 1, r = 2$. Jika ditanyakan setelah tujuh hari maka $n = 7$ sehingga

$$\begin{aligned} S_7 &= \frac{1(2^7 - 1)}{2 - 1} \\ &= 127 \end{aligned}$$

3. Deret Geometri Tak Hingga

Eksplorasi 2.7 Memotong Kertas

Jika tidak tersedia kertas origami, gunakan kertas berbentuk persegi. Untuk mendapatkan kertas berbentuk persegi, peserta didik dapat melipat kertas berbentuk persegi panjang menjadi segitiga siku-siku (lihat **Gambar 2.2**) dan menggunting sisanya.

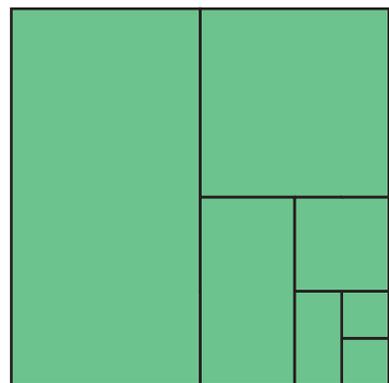


Gambar 2.2 Cara memotong kertas persegi panjang menjadi persegi

Deret Geometri yang dibentuk dengan menggabungkan potongan-potongan kertas adalah

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

Bandingkan susunan potongan-potongan kertas tersebut dengan kertas origami utuh. Terlihat bahwa makin banyak potongan, makin mendekati kertas origami utuh. Artinya, makin besar nilai n , maka nilai S_n makin mendekati 1.





Miskonsepsi

Penting bagi peserta didik untuk memahami bahwa tidak semua deret geometri akan konvergen dan syarat konvergensinya. Deret geometri konvergen jika $|r| < 1$ atau $-1 < r < 1$.

Kunci Jawaban Latihan 2.4

1. $S_{\infty} = 10$

$$a = x$$

$$S_{\infty} = \frac{a}{1-r}$$

$$10 = \frac{x}{1-r}$$

$$10 - 10r = x$$

$$-10r = x - 10$$

$$r = \frac{x-10}{-10}$$

$$r = \frac{10-x}{10}$$

Karena deret tak hingga merupakan deret konvergen, maka rasio berada di rentang $-1 < r < 1$

$$-1 < \frac{10-x}{10} < 1$$

$$-10 < 10-x < 10$$

$$-20 < -x < 0$$

$$0 < x < 20$$

2. $1 + (m-1) + (m-1)^2 + (m-1)^3 + \dots$

$$a = 1 \quad r = \frac{(m-1)^2}{m-1} = m-1$$

Karena deret konvergen, maka $-1 < r < 1$

$$-1 < m-1 < 1$$

$$-2 < m < 0$$

3. $4 + 12 + 36 + 108 + \dots$

$$r = \frac{12}{4} = 3$$

Karena $r > 1$, maka deret tak hingga di atas merupakan deret divergen.

Jadi, $S_{\infty} = +\infty$



Ayo, Berefleksi

Tutup pembelajaran dengan meminta peserta didik melakukan refleksi terhadap apa yang sudah mereka pelajari dengan menjawab pertanyaan refleksi.

Alternatif jawaban pertanyaan pada refleksi:

- Perbedaan deret aritmetika dan deret geometri yaitu pada beda dan rasio dari deret tersebut. Lalu, deret merupakan penjumlahan dari suatu barisan, maka suku-suku pada deret bilangan dipisahkan tanda (+) atau operasi penjumlahan, sedangkan barisan tidak.
- Deret tak hingga konvergen merupakan deret tak hingga yang jumlahnya masih terbatas, sedangkan deret divergen adalah deret tak hingga yang jumlahnya tak terbatas sehingga dinyatakan dengan $\pm\infty$.

Kunci Jawaban Latihan 2.5

1. Alternatif penyelesaian.

$$U_3 = 28.500$$

$$a + 2b = 28.500 \dots \text{(persamaan 1)}$$

$$U_7 = 22.500$$

$$a + 6b = 22.500 \dots \text{(persamaan 2)}$$

Eliminasi Persamaan 1 dan 2

$$a + 2b = 28.500$$

$$a + 6b = 22.500 -$$

$$\hline -4b = 6.000$$

$$b = -1.500$$

$$a + 2b = 28.500$$

$$a + 2(-1.500) = 28.500$$

$$a - 3.000 = 28.500$$

$$a = 31.500$$

$$U_n = 0$$

$$a + (n - 1)b = 0$$

$$31.500 + (n - 1)(-1.500) = 0$$

$$31.500 - 1.500n + 1.500 = 0$$

$$33.000 = 1.500n$$

$$n = \frac{33.000}{1.500}$$

$$n = 22$$

2. Alternatif penyelesaian.

$$U_3 = 20$$

$$ar^2 = 20 \dots \text{Persamaan 1}$$

$$U_5 = 80$$

$$ar^4 = 80 \dots \text{Persamaan 2}$$

Substitusi persamaan 1 ke persamaan 2

$$ar^4 = 80$$

$$ar^2 r^2 = 80$$

$$20r^2 = 80$$

$$r^2 = 4, \quad r = 2$$

$$ar^2 = 20$$

$$a \cdot 2^2 = 20$$

$$a = 5$$

$$U_{10} = ar^9 = 5 \cdot 2^9 = 2.560$$

3. Alternatif penyelesaian.

a. $1 + \frac{5}{3} + \frac{7}{3} + \dots + \frac{23}{3}$

$$a = 1 \quad b = \frac{7}{3} - \frac{5}{3} = \frac{2}{3}$$

$$U_n = \frac{23}{3}$$

$$a + (n-1)b = \frac{23}{3}$$

$$1 + (n-1)\frac{2}{3} = \frac{23}{3}$$

$$1 + \frac{2}{3}n - \frac{2}{3} = \frac{23}{3}$$

$$\frac{2}{3}n = \frac{23}{3} - \frac{1}{3}$$

$$n = \frac{\frac{22}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{22}{3} \cdot \frac{3}{2} = 11$$

$$S_{11} = \frac{11}{2} (a + U_{11}) = \frac{11}{2} \left(1 + \frac{23}{3} \right) = \frac{11}{2} \cdot \frac{26}{3}$$

$$= \frac{143}{3}$$

b. $\frac{1}{27} + \frac{1}{9} + \dots + 243$

$$a = \frac{1}{27} \quad r = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{27}} = 3$$

$$U_n = 243$$

$$a \cdot r^n = 243$$

$$\frac{1}{27} \cdot 3^n = 243$$

$$3^n = 243 : \frac{1}{27} = 243 \cdot 27 = 3^5 \cdot 3^3 = 3^8$$

$$n = 8$$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{\frac{1}{27}(6.560)}{2}$$

$$= \frac{3.280}{27}$$

4. Setelah kakak mengambil sepertiga kue, sisanya adalah $\frac{2}{3}$. Adik mengambil $\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}$ dan sisanya adalah $\left(\frac{2}{3}\right)^2$.

a. $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots$

- b. Ini adalah deret geometri. Deret geometri konvergen jika $|r| < 1$. Untuk deret ini, $r = \frac{2}{3} < 1$ artinya deret ini konvergen.

$$S = \frac{a}{1 - r}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}}$$

$$= 1$$

5. Bola tenis dilemparkan ke atas setinggi 1 m. Bola tersebut akan terus memantul sampai akhirnya berhenti. Setelah dicermati, setiap kali bola memantul, tingginya menjadi $\frac{1}{4}$ kali dari tinggi pantulan sebelumnya. Kira-kira berapa panjang lintasan bola sampai akhirnya berhenti?
- Menurutmu, apakah tinggi pantulan bola pada permasalahan di atas membentuk deret geometri? Ya. Bagaimana kamu mengetahuinya? Karena disebutkan pada permasalahan bahwa setiap kali bola memantul, tingginya menjadi $\frac{1}{4}$ kali dari tinggi pantulan sebelumnya. Maka $\frac{1}{4}$ adalah rasio pada deret geometri.

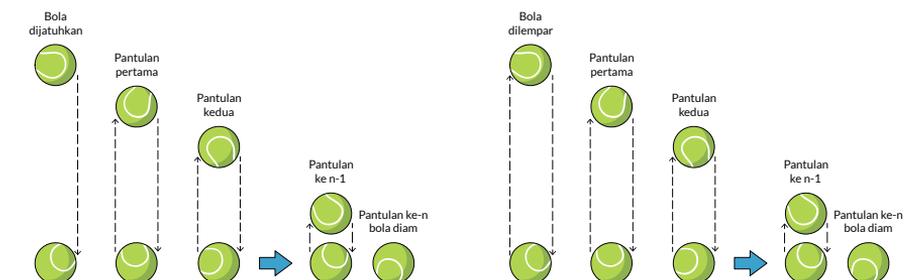
- Setelah melakukan percobaan, apakah kamu mengetahui dengan pasti berapa kali bola memantul sampai akhirnya berhenti? Tidak. Karena banyak pantulan bola tidak terhitung.



Ayo, Berpikir Kreatif

Apakah panjang lintasan bola akan sama jika bola dijatuhkan dari ketinggian tertentu atau dilempar dari bawah? Jelaskan jawabanmu.

Alternatif jawaban: Panjang lintasannya akan berbeda. Jika bola dijatuhkan dari ketinggian tertentu, panjang lintasannya akan lebih panjang dari lintasan bola yang dilempar dari bawah, seperti pada gambar di bawah ini.



$$\begin{aligned}
 6. \quad U_3 &= ar^2 = 90 \\
 10r^2 &= 90 \\
 r^2 &= \frac{90}{10} \\
 r^2 &= 9 \\
 r &= 3
 \end{aligned}$$

Pertambahan penduduk pada tahun 2025 adalah

$$\begin{aligned}
 U_5 &= ar^4 \\
 &= 10 \times 3^4 \\
 &= 10 \times 81 \\
 &= 810
 \end{aligned}$$

Jadi, jumlah pertambahan penduduk pada tahun 2025 adalah 810 orang.

$$\begin{aligned}
 7. \quad U_{60} &= U_n \\
 S_n &= \frac{n}{2} (a + U_n) \\
 30.000 &= 30 (50 + U_n) \\
 30(50 + U_n) &= 30.000 \\
 50 + U_n &= 1.000 \\
 U_n &= 950
 \end{aligned}$$

Jadi, Pak Artus mengumpulkan sebanyak 950 butir telur pada hari terakhir.

8. Alternatif penyelesaian.

$$\text{Minggu Pertama} = U_1 = a = 24$$

$$\text{Minggu Kedua} = 2 \times U_1 = 2 \times 24 = 48$$

$$\text{Minggu Ketiga} = U_3 = 96 = 2 \times 48$$

$$\begin{aligned}
 U_n &= 2^{n-1} \times U_1 \\
 U_8 &= 2^{8-1} \times 24 = 2^7 \times 24 = 128 \times 24 \\
 &= 3.072 \\
 S_n &= \frac{n}{2} (a + U_n) \\
 S_8 &= \frac{8}{2} (24 + 3.072) \\
 S_8 &= 4(3.096) \\
 S_n &= 12.384
 \end{aligned}$$

Jadi, total jumlah pasien pada bulan kedua adalah 12.384 orang.

9. Panjang lintasan ketika bola jatuh:

$$\begin{aligned}
 a &= 8, \quad r = \frac{3}{5} \\
 S_\infty &= \frac{a}{1-r} = \frac{8}{1-\frac{3}{5}} = \frac{8}{\frac{2}{5}} = 8 \cdot \frac{5}{2} = 20 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Panjang lintasan ketika bola memantul ke atas:

$$\begin{aligned}
 a &= 8 \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{5}, \quad r = \frac{3}{5} \\
 S_\infty &= \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{24}{5}}{1-\frac{3}{5}} = \frac{\frac{24}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{24}{5} \cdot \frac{5}{2} \\
 &= 12 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Total panjang lintasan bola

$$20 \text{ m} + 12 \text{ m} = 32 \text{ m}$$

10. Luas lingkaran terbesar: 1.386 cm^2

Luas lingkaran II (kecil): 154 cm^2

Barisan Aritmetika:

$$K_1, K_1, K_3, K_4, K_5$$

$$K_3 = U_3 = \dots$$

Luas lingkaran terbesar = 1.386 cm^2

$$\pi r^2 = 1.386 \text{ cm}^2$$

$$\frac{22}{7}r^2 = 1.386 \text{ cm}^2$$

$$r^2 = 1.386 \text{ cm}^2 \cdot \frac{7}{22}$$

$$r^2 = 441 \text{ cm}^2$$

$$r = 21$$

Maka keliling lingkaran pertama:

$$(U_1) = a = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot 21 = 132 \text{ cm}$$

Luas lingkaran kecil = 154 cm^2

$$\pi r^2 = 154 \text{ cm}^2$$

$$\frac{22}{7}r^2 = 154 \text{ cm}^2$$

$$r^2 = 154 \text{ cm}^2 \cdot \frac{7}{22}$$

$$r^2 = 49 \text{ cm}^2$$

$$r = 7 \text{ cm}$$

Maka keliling lingkaran terkecil

$$U_5 = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot 7 = 44 \text{ cm}$$

Keliling lingkaran membentuk barisan Aritmetika.

$$U_5 = a + 4b$$

$$44 = 132 + 4b$$

$$4b + 132 = 44$$

$$4b = 44 - 132$$

$$4b = -88$$

$$b = -22$$

Sehingga keliling lingkaran ketiga:

$$U_3 = a + 2b = 132 + 2(-22) = 88$$

Jadi keliling lingkaran ketiga adalah 88 cm

11. $U_1 = 3$

$$U_7 = 192$$

Ditanya:

$$U_2, U_3, U_4, U_5, U_6!$$

Penyelesaian

$$U_1 = a = 3$$

$$U_7 = 192$$

$$ar^6 = 192$$

$$3r^6 = 192$$

$$r^6 = 64$$

$$r = 2$$

$$U_2 = ar = 3 \times 2 = 6$$

$$U_3 = ar^2 = 3(2^2) = 3(4) = 12$$

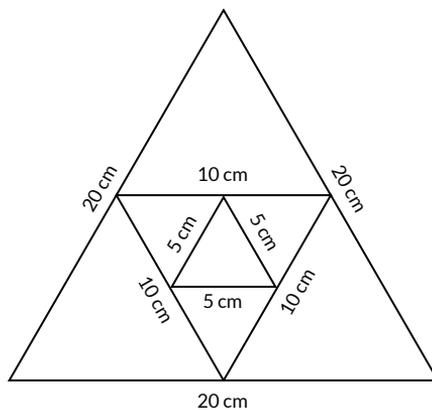
$$U_4 = ar^3 = 3(2^3) = 3(8) = 24$$

$$U_5 = ar^4 = 3(2^4) = 3(16) = 48$$

$$U_6 = ar^5 = 3(2^5) = 3(32) = 96$$

Jadi, 5 bilangan yang disisipkan di antara 3 dan 192 agar susunan bilangan tersebut membentuk barisan geometri berturut-turut adalah 6, 12, 24, 48, dan 96.

12.



Keliling semua segitiga pertama (K_1) = $3s = 3 \times 20 = 60$ cm

$$K_2 = 3s = 3 \left(\frac{1}{2} \times 20 \right) = 3 \left(\frac{1}{2} \times 20 \right) = 30 \text{ cm}$$

$$K_3 = 3s = 3 \left(\frac{1}{2} \times 10 \right) = 3 \left(\frac{1}{2^2} \times 20 \right) = 15 \text{ cm}$$

$$K_n = 3s = 3 \times \left(\frac{1}{2^{n-1}} \times s \right)$$

$$K_4 = 3s = 3 \times \left(\frac{1}{2^{4-1}} \times 20 \right) = 3 \times \left(\frac{1}{2^3} \times 20 \right) = 3 \times \left(\frac{1}{8} \times 20 \right) = 3 \times 2,5 = 7,5 \text{ cm}$$

$$K_5 = 3s = 3 \times \left(\frac{1}{2^4} \times 20 \right) = 3 \times \left(\frac{1}{16} \times 20 \right) = \times 1,25 = 3,75 \text{ cm}$$

$$K_6 = 3s = 3 \times \left(\frac{1}{2^5} \times 20 \right) = 3 \times \left(\frac{1}{32} \times 20 \right) = \times 0,625 = 1,875 \text{ cm}$$

Total:

$$K_1 + K_2 + K_3 + K_4 + K_5 + K_6 = 60 + 30 + 15 + 7,5 + 3,75 + 1,875 = 118,125 \text{ cm}$$

Jadi, total keliling semua segitiga adalah 118,125 cm.

C. Bunga



Kriteria Ketercapaian Tujuan Pembelajaran

- Peserta didik dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan bunga tunggal
- Peserta didik dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan bunga majemuk



Apersepsi

Salah satu penerapan konsep barisan dan deret adalah pada perhitungan bunga. Bunga tunggal menggunakan konsep barisan dan deret aritmetika, sedangkan bunga majemuk menggunakan konsep barisan dan deret geometri.

1. Bunga Tunggal

Eksplorasi 2.8 Tabungan dengan Bunga Tunggal



Ayo, Bereksplorasi

1.

| Tahun | Bunga | Nilai Uang |
|-------|---------------------------------|----------------------------------|
| 1 | $5\% \times 1.000.000 = 50.000$ | $1.000.000 + 50.000 = 1.050.000$ |
| 2 | $5\% \times 1.000.000 = 50.000$ | $1.050.000 + 50.000 = 1.100.000$ |
| 3 | $5\% \times 1.000.000 = 50.000$ | $1.100.000 + 50.000 = 1.150.000$ |

| Tahun | Bunga | Nilai Uang |
|-------|---------------------------------|----------------------------------|
| 4 | $5\% \times 1.000.000 = 50.000$ | $1.150.000 + 50.000 = 1.200.000$ |
| 5 | $5\% \times 1.000.000 = 50.000$ | $1.200.000 + 50.000 = 1.250.000$ |

2. Nilai uang membentuk barisan **aritmetika** dengan $U_1 = 1.000.000$ dan $b = 50.000$.
3. Bentuk umum untuk nilai uang setelah disimpan n tahun.
 $U_n = 1.000.000 + 50.000(n - 1)$.

Nilai uang yang disimpan di bank dengan bunga tunggal membentuk barisan **aritmetika**.

2. Bunga Majemuk

Eksplorasi 2.9 Tabungan dan Bunga Majemuk

1. Lengkapilah tabel berikut

| Tahun | Pokok | Bunga | Tabungan |
|-------|-----------|--------------------------------------|---------------------------------------|
| 1 | 1.000.000 | $5\% \times 1.000.000$ $= 50.000$ | $1.000.000 + 50.000$ $= 1.050.000$ |

| Tahun | Pokok | Bunga | Tabungan |
|-------|-----------|--------------------------------------|---------------------------------------|
| 2 | 1.050.000 | $5\% \times 1.050.000$ $= 52.500$ | $1.050.000 + 52.500$ $= 1.102.500$ |
| 3 | 1.102.500 | $5\% \times 1.102.500$ $= 55.125$ | $1.102.500 + 55.125$ $= 1.157.625$ |
| 4 | 1.157.625 | $5\% \times 1.157.625$ $= 57.881$ | $1.157.625 + 57.881$ $= 1.215.506$ |
| 5 | 1.215.506 | $5\% \times 1.215.506$ $= 60.775$ | $1.215.506 + 60.775$ $= 1.276.282$ |

2. Perhatikan kolom nilai uang. Barisan jenis apakah yang dibentuk oleh nilai uang yang disimpan dengan bunga majemuk?

Barisan **geometri** dengan $U_1 = 1.000.000$ dan $r = 1,05$

3. Tentukan bentuk umum untuk nilai uang setelah disimpan n tahun.
 $U_n = 1.000.000 \times 1,05^n$

Nilai uang yang disimpan di bank dengan bunga majemuk membentuk barisan **geometri**.

Kunci Jawaban Latihan 2.6

1. Uang Firman

- Bunga yang diterima Firman di rekening tabungannya setiap tahun
 $3\% \times 10.000.000 = 300.000$
- Uang Firman setelah satu tahun $10.000.000 + 300.000 = 10.300.000$
- Uang Firman setelah dua tahun
 $10.000.000 + 2 \times 300.000 = 10.600.000$
- Uang Firman setelah lima tahun
 $10.000.000 + 5 \times 300.000 = 11.500.000$

2. Uang Gigih

- a. Lengkapilah tabel berikut

| Tahun | Pokok | Bunga | Tabungan |
|-------|------------|--|--|
| 1 | 10.000.000 | $3\% \times 10.000.000$ $= 300.000$ | $10.000.000 + 300.000$ $= 10.300.000$ |

| Tahun | Pokok | Bunga | Tabungan |
|-------|------------|--|--|
| 2 | 10.300.000 | $3\% \times 10.300.000$ $= 309.000$ | $10.300.000 + 309.000$ $= 10.609.000$ |
| 3 | 10.609.000 | $3\% \times 10.609.000$ $= 318.270$ | $10.609.000 + 318.270$ $= 10.927.270$ |
| 4 | 10.927.270 | $3\% \times 10.927.270$ $= 327.818$ | $10.927.270 + 327.818$ $= 11.255.088$ |
| 5 | 11.255.088 | $3\% \times 11.255.088$ $= 337.653$ | $11.255.088 + 337.653$ $= 11.592.741$ |

- b. Uang Gigih setelah satu tahun Rp10.300.000,00.
- c. Uang Gigih setelah dua tahun Rp10.609.000,00.
- d. Setelah lima tahun, uang Firman Rp11.500.000,00 dan uang Gigih Rp11.592.741,00. Uang Gigih lebih banyak Rp92.741,00.

e.  **Ayo, Berpikir Kreatif**

Kemungkinan peserta didik akan memilih seperti Gigih agar uangnya lebih banyak.

3. Selama dua tahun, bunga yang harus dibayarkan adalah $2 \times 8\% \times 2.500.000 = 400.000$. Total yang harus dikembalikan $2.500.000 + 400.000 = 2.900.000$ dalam 2 tahun atau 24 bulan. Cicilan tiap bulan sebesar $2.900.000 \div 24 = 120.833$.
4. Dina meminjam uang senilai Rp3.000.000,00 dengan bunga 7% per tahun selama tiga tahun. Dia mencicil utangnya setiap tahun. Pokok utang yang telah dibayar, tidak dibayarkan lagi bunganya. Lengkapilah tabel berikut

| Tahun ke- | Nilai Utang | Cicilan Pokok | Bunga | Cicilan Utang |
|-----------|-------------|---------------|---------------------------------------|--|
| 1 | 3.000.000 | 1.000.000 | $7\% \times 3.000.000$ $= 210.000$ | $1.000.000 + 210.000$ $= 1.210.000$ |
| 2 | 2.000.000 | 1.000.000 | $7\% \times 2.000.000$ $- 140.000$ | $1.000.000 + 140.000$ $= 1.140.000$ |
| 3 | 1.000.000 | - | $7\% \times 1.000.000$ $= 70.000$ | $1.000.000 + 70.000$ $= 1.070.000$ |

Kunci Jawaban

Uji Kompetensi

1. a. $4 + 2 + 1 + \dots$

$$U_1 = a = 4$$

$$U_{10} \text{ dan } S_{10} = \dots$$

Alternatif penyelesaian:

$$r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$U_n = ar^{n-1}$$

$$U_{10} = 4 \left(\frac{1}{2}\right)^9 = 4 \left(\frac{1}{512}\right) = \frac{4}{512} = \frac{1}{128} = \frac{1}{2^7}$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$S_{10} = \frac{4(1 - (\frac{1}{2})^9)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{4(1 - \frac{1}{512})}{\frac{1}{2}} = \frac{4(\frac{511}{512})}{\frac{1}{2}} = 8 \left(\frac{511}{512}\right) = \frac{511}{2^6}$$

Jadi, suku ke-10 dan jumlah 10 suku pertama dari deret tersebut berturut-turut adalah $\frac{1}{2^7}$ dan $\frac{511}{2^6}$

b. $4 + 1 + (-2) + \dots$

$$U_1 = a = 4$$

$$U_{10} \text{ dan } S_{10} = \dots$$

$$b = U_2 - U_1 = 1 - 4 = -3$$

$$U_{10} = a + 9b = 4 + 9(-3) = 4 - 27 = -23$$

$$S_{10} = \frac{10}{2} (a + U_{10}) = 5(4 + (-23)) = 5(-19) = -95$$

Jadi, suku ke-10 dan jumlah 10 suku pertama dari deret tersebut berturut-turut adalah -23 dan -95

2. $U_2 + U_5 + U_{20} = 54$

$$U_9 = \dots$$

Alternatif penyelesaian:

$$U_2 + U_5 + U_{20} = 54$$

$$(a+b) + (a+4b) + (a+19b) = 54$$

$$3a + 24b = 54$$

$$3(a+8b) = 54$$

$$a + 8b = 18$$

$$U_9 = a+8b = 18$$

Jadi, suku ke-9 barisan aritmetika tersebut adalah 18.

3. $U_1 = 4$

$$U_5 = 324$$

$$U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 = S_5 = \dots$$

Alternatif penyelesaian:

$$U_5 = ar^4$$

$$324 = 4r^4$$

$$4r^4 = 324$$

$$r^4 = 81$$

$$r = 3$$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$S_5 = \frac{4(3^5 - 1)}{3 - 1}$$

$$S_5 = \frac{4(243 - 1)}{2}$$

$$S_5 = 2(242)$$

$$S_5 = 484$$

Jadi, panjang pipa semula adalah 484 cm.

4. $b = 2$

$$U_5 = a + 4b = a + 8$$

$$U_{13} = a + 12b = a + 24$$

$$\frac{a + 8}{a + 24} = \frac{1}{2}$$

$$2a + 16 = a + 24$$

$$a = 8$$

$$U_n = 50$$

$$a + (n - 1)b = 50$$

$$8 + 2(n - 1) = 50$$

$$2(n - 1) = 42$$

$$n - 1 = 21$$

$$n = 22$$

$$S_n + \frac{n}{2}(a + U_n)$$

$$S_n = \frac{22}{2}(8 + 50)$$

$$S_n = 11 \times 58 = 638$$

5. $\frac{x+y}{xy} = 1$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{xy^2} + \dots$$

Alternatif penyelesaian:

$$\frac{x+y}{xy} = 1$$

$$xy = x + y$$

Dari deret geometri tak hingga di atas, dapat diketahui bahwa:

$$a = \frac{1}{x} \quad r = \frac{1}{y}$$

$$\begin{aligned} S_\infty &= \frac{a}{1-r} \\ &= \frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{y}} \\ &= \frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{y}} \times \frac{xy}{xy} \\ &= \frac{y}{xy-x} \\ &= \frac{y}{(x+y)-x} \\ &= \frac{y}{y} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Pengayaan

Proyek ini bersifat opsional dan dapat diberikan sebagai tugas tambahan. Barisan Fibonacci memiliki sifat $U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$ dengan berbagai nilai U_1 dan U_2 .

Perhatikan bilangan pada barisan Fibonacci:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

Kapan bilangannya genap dalam barisan?

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

Apakah ada polanya?

Setiap tiga suku. U_n genap jika n merupakan kelipatan 3.

Mengapa? Perhatikan bahwa U_1 dan U_2 adalah bilangan ganjil. $U_3 = U_1 + U_2$ merupakan bilangan genap karena jumlah dua buah bilangan ganjil. $U_4 = U_2 + U_3$ adalah jumlah bilangan ganjil dan bilangan genap, yaitu bilangan ganjil. $U_5 = U_3 + U_4$ adalah jumlah bilangan genap dan bilangan ganjil, yaitu bilangan ganjil. Demikian seterusnya bilangan genap terjadi saat n merupakan kelipatan 3.

| ... | U_n | ganjil/genap |
|-----|-------|--------------|
| 1 | 1 | ganjil |
| 2 | 1 | ganjil |
| 3 | 2 | genap |
| 4 | 3 | ganjil |
| 5 | 5 | ganjil |
| 6 | 8 | genap |
| 7 | 13 | ganjil |
| 8 | 21 | ganjil |
| 9 | 34 | genap |
| 10 | 55 | ganjil |
| 11 | 89 | ganjil |
| 12 | 144 | genap |

Bilangan Fibonacci manakah yang dapat dibagi habis 3?

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

| n | U_n | sisanya jika dibagi 3 |
|-----|-------|-----------------------|
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 |
| 3 | 2 | 2 |
| 4 | 3 | 0 |
| 5 | 5 | 2 |
| 6 | 8 | 2 |
| 7 | 13 | 1 |
| 8 | 21 | 0 |
| 9 | 34 | 1 |
| 10 | 55 | 1 |
| 11 | 89 | 2 |
| 12 | 144 | 0 |

Refleksi

Tutup pembelajaran dengan meminta peserta didik melakukan refleksi terhadap apa yang sudah mereka pelajari dengan menjawab pertanyaan refleksi.

Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Republik Indonesia, 2023

**Panduan Guru Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas X
(Edisi Revisi)**

Penulis: Dicky Susanto, dkk.
ISBN: 978-623-118-562-4

Bab

3

Panduan Khusus

Perbandingan Trigonometri



Mengapa perbandingan trigonometri berguna dalam kehidupan sehari-hari?

Pendahuluan

Setelah mempelajari bab ini peserta didik diharapkan dapat memahami bahwa perbandingan trigonometri menunjukkan hubungan antara sudut dan sisi pada segitiga siku-siku. Selain itu, peserta didik diharapkan mampu menerapkan perbandingan trigonometri dalam permasalahan.

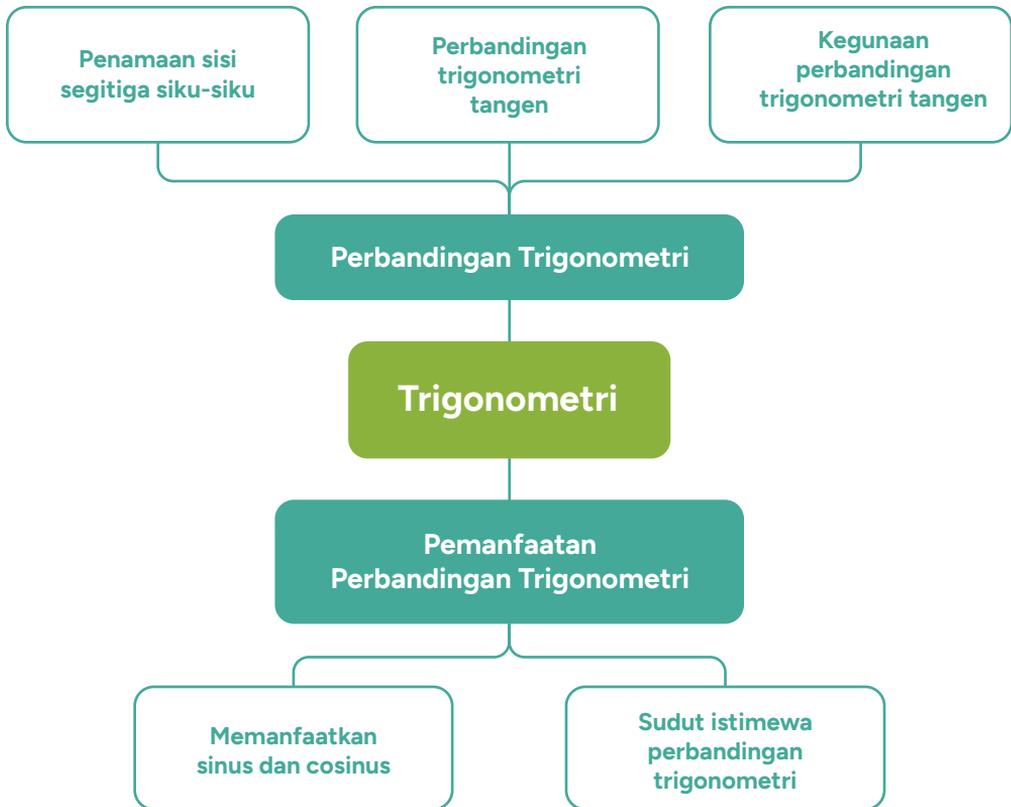
Guna memastikan tercapainya tujuan pembelajaran maka dapat digunakan beberapa kriteria seperti yang diberikan di bawah ini.

- Peserta didik mampu menerapkan perbandingan trigonometri untuk mencari panjang sisi segitiga yang tidak diketahui.
- Peserta didik mampu mencari solusi permasalahan sehari-hari dengan menerapkan perbandingan trigonometri (\sin , \cos , dan $\tan \theta$).
- Peserta didik mampu menjelaskan manfaat perbandingan trigonometri dalam kehidupan sehari-hari

Pokok materi yang akan dipelajari dalam bab ini adalah perbandingan trigonometri. Pembelajaran perbandingan trigonometri bertujuan untuk memahami jenis-jenis perbandingan trigonometri pada segitiga siku-siku dan menyelesaikan permasalahan matematika dalam kehidupan sehari-hari. Fokus dari pembelajaran adalah bagaimana memahami konsep dan prinsip dari perbandingan trigonometri sehingga dapat diterapkan dalam berbagai situasi.

Perbandingan trigonometri digunakan dalam penentuan tinggi gunung atau bangunan tinggi dengan teodolit. Pembelajaran bab ini juga terkait dengan mata pelajaran Fisika, khususnya topik vektor, kinematika, dinamika, dan medan magnet.

Peta Materi



Bab ini disarankan untuk diselesaikan dalam pertemuan sebanyak 15 JP, namun guru dapat menyesuaikan dengan kondisi satuan pendidikan setempat dengan memperhitungkan keragaman kondisi, potensi, kemampuan individu peserta didik, dan dinamika kelas.

Konsep dan Keterampilan Prasyarat

Pengetahuan awal yang diperlukan untuk mempelajari perbandingan trigonometri adalah teorema Pythagoras, rasio atau perbandingan, dan kesebangunan segitiga.

Penyajian Materi Esensial

Pada subbab A peserta didik melakukan kegiatan eksplorasi perbandingan panjang bayangan dan tinggi seseorang sehingga mereka memahami nilai perbandingan tangen.

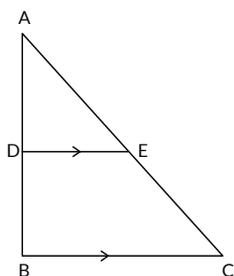
Pada subbab B peserta didik melakukan kegiatan eksplorasi penerapan perbandingan trigonometri pada bangun ruang dan diajak untuk membandingkan perubahan nilai perbandingan trigonometri ketika salah satu sudut segitiga siku-siku diubah. Peserta didik juga mengembangkan pemahaman sinus dan cosinus. Mereka juga melakukan kegiatan eksplorasi dengan segitiga siku-siku sama kaki dan segitiga sama sisi untuk menemukan nilai perbandingan trigonometri sudut istimewa.

Apersepsi

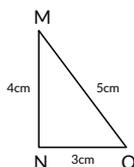
Perkenalkan bab ini dengan mengajak peserta didik berpikir bagaimana menentukan ketinggian gunung dan pencakar langit. Bangkitkan keingintahuan peserta didik dengan mengajak mereka menganalisis segitiga siku-siku dan menanyakan mereka apa yang bisa dieksplor. Berikan contoh-contoh yang lain. Tampung semua jawaban yang muncul dan arahkan mereka untuk memahami esensi topik dari bab 3.

Penilaian Sebelum Pembelajaran

Gunakan bagian **Ayo, Mengingat Kembali** mengenai pemahaman teorema Pythagoras, perbandingan/rasio, dan kesebangunan segitiga yang sudah dipelajari di SMP. Contoh pertanyaan yang dapat digunakan untuk mengaktifkan prapengetahuan peserta didik.



Gambar 3.6 Segitiga Sebangun 1



Gambar 3.7 Segitiga Sebangun 2

Mengapa segitiga-segitiga pada Gambar 3.6 dan 3.7 dikatakan sebangun?

Peserta didik dapat diberikan pertanyaan-pertanyaan lain untuk menggali pemahaman prapengetahuan seperti menentukan panjang sisi dengan menggunakan Teorema Pythagoras.

Panduan Pembelajaran

A. Perbandingan Trigonometri



Kriteria Ketercapaian Tujuan Pembelajaran

- Peserta didik mampu menerapkan perbandingan trigonometri untuk mencari panjang sisi segitiga yang tidak diketahui.
- Peserta didik mampu mencari solusi permasalahan sehari-hari dengan menerapkan perbandingan trigonometri ($\tan \theta$).



Sarana & Prasarana Pembelajaran

Tempat yang cukup luas untuk percobaan bayangan.

- Sumber cahaya.
- Untuk proyek pengayaan: selotip, gunting, sedotan, busur, tali, dan panah yang terbuat dari karton.



Apersepsi

Perkenalkan bab ini dengan dan menanyakan kepada peserta didik objek apa yang ingin mereka ukur ketinggiannya jika mereka mempunyai alat teodolit. Setelah itu, sampaikan beberapa pertanyaan pemantik (misalnya, apa hubungan antara sisi dan sudut pada segitiga siku-siku? Apakah perbandingan trigonometri berlaku pada segala jenis segitiga? Mengapa perbandingan trigonometri berguna? Permasalahan sehari-hari apa yang dapat dan tidak dapat dipecahkan dengan perbandingan trigonometri?) Beri tahu peserta didik bahwa mereka akan memikirkan dan mencoba mendapatkan jawaban dari pertanyaan ini selama pembelajaran bab

mengenai perbandingan trigonometri. Pertanyaan-pertanyaan tersebut juga dapat dituliskan pada kertas poster dan dipajang agar peserta didik dapat terus merujuk kembali kepadanya.

Gunakan bagian **Ayo, Mengingat Kembali** mengenai teori Pythagoras, nilai perbandingan, dan kesebangun segitiga yang sudah dipelajari di SMP. Pertanyaan-pertanyaan berikut dapat digunakan untuk mengaktifkan prapengetahuan peserta didik:

- Bagaimana cara mencari panjang sisi segitiga jika kita hanya mengetahui panjang kedua sisi segitiga lainnya?
- Berikan contoh rasio/nilai perbandingan dalam kehidupan sehari-hari.
- Berikan beberapa pasang gambar segitiga kepada peserta didik. Apakah kedua segitiga ini sebangun?



Mulai aktivitas pembelajaran dengan menanyakan kepada peserta didik mengenai panjang keliling bumi. Tanyakan juga kepada peserta didik bagaimana ilmuwan dapat sampai menemukan angka tersebut. Ajak peserta didik menonton video yang disediakan dan minta peserta didik memperhatikan bagaimana matematikawan Erasthotenes menggunakan nilai perbandingan untuk memecahkan masalah. Setelah selesai, minta peserta didik melakukan **Eksplorasi 3.1**. Peserta didik dapat melakukan eksplorasi secara mandiri dengan melakukan percobaan bayangan, namun, jika tidak memungkinkan, peserta didik dapat menggunakan gambar yang tersedia.

Dengan mengikuti petunjuk di Buku Siswa, guru akan berperan sebagai pembimbing dan fasilitator dalam kegiatan ini. Berikan arahan, bukan jawaban, supaya peserta didik dapat mengembangkan keterampilan pemecahan masalah dan kolaborasi melalui kegiatannya.

Pada pertanyaan nomor 2 dan 4, peserta didik seharusnya mendapatkan nilai perbandingan dan besaran sudut yang sama. Berikan ruang kepada peserta didik untuk menebak dan bernalar dalam menjawab pertanyaan pemantik pada kegiatan ini. Jangan memberikan jawaban terlebih dahulu, karena hal ini akan dilakukan pada bagian selanjutnya.

1. Penamaan Sisi Segitiga Siku-Siku

Kaitkan penjelasan bagian ini dengan **Eksplorasi 3.1**. Sebelum **Latihan 3.1**, berikan beberapa contoh segitiga lainnya (yang tidak sama dengan yang ada pada Buku Siswa) dan minta peserta didik mengidentifikasi nama sisinya. **Latihan 3.1** dapat dilakukan oleh peserta didik secara mandiri kemudian kolaborasi. Pastikan pada akhirnya guru memberikan jawaban yang benar dengan penjelasan. **Latihan 3.1** ini akan memberikan gambaran kepada guru tingkat pemahaman peserta didik pada topik ini.

Kunci Jawaban Latihan 3.1

1. Y = Sisi depan
X = Sisi samping
Z = Sisi miring
2. Putri harus memperhatikan letak sudut yang dirujuk. Sisi depan sudut 30° adalah sisi n, bukan sisi m. Sisi samping sudut 30° adalah sisi m, bukan sisi n. Putri sudah benar mengidentifikasi sisi miringnya yaitu sisi o.

2. Satu Jenis Perbandingan Trigonometri: $\tan \theta$

Setelah ini guru akan memperkenalkan perbandingan trigonometri tangen dan mengaitkannya dengan hasil eksplorasi. Gunakan pertanyaan-pertanyaan di bagian **Ayo, Mengingat Kembali** dan **Ayo, Berpikir Kreatif** untuk memulai diskusi kelas dan menyokong pemahaman peserta didik.

Pada subbab ini, guru tidak akan memperkenalkan ketiga perbandingan trigonometri sekaligus karena praktik ini sering kali membingungkan peserta didik. Tidak jarang juga ditemukan kasus peserta didik menghafalkan singkatan untuk mengingat rumus sin, cos, dan tan tanpa benar-benar mengerti apa itu perbandingan trigonometri dan kegunaannya. Dengan dasar inilah, buku ini menyarankan guru hanya memperkenalkan satu perbandingan trigonometri terlebih dahulu dan memastikan pemahaman yang dalam dan tepat mengenai konsep ini. Dengan demikian, ketika sinus dan cosinus diperkenalkan di subbab selanjutnya, peserta didik akan dengan mudah memahami dan dapat menerapkan perbandingan trigonometri dengan tepat berdasarkan konteks permasalahannya.

Kegiatan **Latihan 3.2** bertujuan untuk memberikan peserta didik pengalaman pembelajaran bahwa segitiga yang sebangun memiliki nilai perbandingan trigonometri yang sama. Pada latihan ini, guru juga mengambil peran menjadi pembimbing dan fasilitator. Berikan kesimpulan kegiatan latihan bahwa setiap kelompok mendapatkan nilai $\tan 40^\circ$ yang sama pada segitiga yang berbeda-beda. Untuk memastikan pengertian peserta didik, tanyakan mengapa hal ini bisa terjadi dan minta mereka menjelaskan.

3. Kegunaan Perbandingan Trigonometri: $\tan \theta$

Bagian ini adalah contoh penerapan perbandingan trigonometri tangen untuk memecahkan masalah sehari-hari. Pada Buku Siswa, dua metode penyelesaian dipaparkan untuk membantu peserta didik melihat bahwa dengan perbandingan trigonometri, penghitungan matematika yang dilakukan dapat lebih ringkas dan efisien. Guru dapat memberikan pertanyaan pancingan supaya peserta didik dapat sampai pada kesimpulan tersebut. Pertanyaan pemancing seperti “Cara mana yang lebih mudah untuk kalian? Apakah ada cara yang lebih cepat dibandingkan yang lain?”



Diferensiasi

Kegiatan **Latihan 3.3** dilakukan peserta didik untuk memperkuat pemahaman penggunaan perbandingan trigonometri dalam memecahkan masalah. Nomor pertama khususnya sangat mirip dengan contoh sehingga dapat digunakan untuk peserta didik yang kurang mengerti contoh sebelumnya.

Bagi peserta didik yang **mengalami kesulitan menentukan nama sisi segitiga**, berikan waktu yang cukup untuk peserta didik mencoba kegiatan berikut ini.

Berikan gambar segitiga siku-siku dan minta peserta didik mengidentifikasi salah satu sudut lancipnya. Beri waktu peserta didik untuk mengidentifikasi nama sisi segitiganya. Jika peserta didik mengalami kesulitan, guru dapat meminta peserta didik menggunakan jari untuk mengarahkan ke sisi depan/sisi samping/sisi miring. Pastikan juga peserta didik mengerti bahwa sisi miring adalah sisi di depan sudut siku-siku, bukan sisi yang “terlihat miring”. Peserta didik juga perlu diberi waktu untuk melakukan kegiatan yang sama, namun sekarang segitiganya diputar sehingga bentuk bangun datar terlihat sedikit berbeda. Ulangi dengan beberapa jenis segitiga sampai peserta didik mahir dan

mengerti. Jika kegiatan ini tidak mungkin dilakukan pada jam pelajaran, guru dapat memberikan tugas latihan ini kepada peserta didik dalam bentuk PR.

Bagi peserta didik yang **mengalami kesulitan memahami perbandingan trigonometri tangen**, berikan waktu yang cukup agar peserta didik mencoba kegiatan ini.

Minta peserta didik membuat 3 segitiga siku-siku dengan ukuran berbeda-beda namun dengan satu sudut yang sama misalnya 60° . Minta peserta didik mencari nilai perbandingan sisi depan dan sisi samping. Kemudian tanyakan kepadanya mengapa hasilnya sama? Tunjukkan juga jika ketiga segitiga tersebut ditata dengan ditumpuk, akan terlihat bahwa mereka adalah segitiga sebangun. Jika kegiatan ini tidak mungkin dilakukan pada jam pelajaran, guru dapat memberikan tugas latihan ini kepada peserta didik dalam bentuk PR.

Bagi peserta didik yang **kecepatan belajarnya tinggi (*advanced*)**, minta mereka mencari berbagai nilai \tan dari sudut 10° sampai 80° . Minta mereka untuk mencari kesimpulan pola nilai perbandingan tangen saat ukuran sudut bertambah besar. Pastikan mereka memahami penjelasan polanya dan menuliskan penjabarannya di buku tulis. Jika ada waktu cukup, kelompok peserta didik ini dapat diberikan kesempatan untuk mempresentasikan penemuan mereka. Jika kegiatan ini tidak mungkin dilakukan pada jam pelajaran, guru dapat memberikan tugas latihan ini kepada peserta didik dalam bentuk PR.

Kunci Jawaban Latihan 3.2

1. Tidak bisa. Untuk mencari nilai perbandingan tangen, segitiga yang dirujuk haruslah segitiga siku-siku. Segitiga pada soal ini tidak memenuhi kriteria segitiga siku-siku karena tidak ada sudut siku-sikunya.

Untuk soal nomor 2, 3, 4, dan 5:

Kesimpulan yang diharapkan peserta didik dapatkan melalui kegiatan latihan ini adalah bahwa nilai $\tan 40^\circ$ berupa nilai perbandingan yang benar adanya pada segitiga sekalipun ukurannya berbeda-beda. Untuk memeriksa pemahaman peserta didik, guru dapat bertanya bila jawaban perbandingan $\tan 45^\circ$ pada segitiga dengan ukuran berbeda-beda akan sama atau berbeda.

Kunci Jawaban Latihan 3.3

1. Tinggi orang dewasa pada Gambar 3.15 di Buku Siswa

- a. Menggunakan segitiga sebangun

$$\frac{\text{tinggi anak kecil}}{\text{panjang bayangan anak kecil}} = \frac{\text{tinggi orang dewasa}}{\text{panjang bayangan orang dewasa}}$$

$$\frac{114}{200} = \frac{y}{305}$$

$$y = \frac{114 \times 305}{200}$$

$$y = 173,85 \text{ cm}$$

- b. Menggunakan perbandingan trigonometri

$$\tan 30^\circ = \frac{y}{305}$$

$$y = 173,85 \text{ cm}$$

2. Segitiga sebangun

- a. Panjang sisi c

$$\tan \theta = \frac{b}{c}$$

$$0,47 = \frac{12}{c}$$

$$c = 25,53 \text{ cm}$$

- b. Panjang sisi c telah dihitung di (a). Panjang sisi f

$$f = \frac{1}{3} \times c$$

$$f = \frac{1}{3} \times 25,53 = 8,51 \text{ cm}$$

Kunci Jawaban Latihan 3.4

1. Peserta didik menggambar segitiga dengan sisi samping yang 4 kali lebih panjang dari sisi depan berdasarkan letak pada segitiganya. Contoh jawaban yang tepat:



2. a. $x = 12,07 \text{ cm}$ c. $x = 11,25 \text{ cm}$
 b. $x = 9,23 \text{ cm}$

Panjang jalan yang perlu direncanakan untuk menghubungkan titik B ke A adalah 814 meter.

b. $\frac{814}{1.151} \approx 0,707$

c. $\frac{814}{1.151} \approx 0,707$

- d. Segitiga sebangun mempunyai perbandingan nilai sisi yang sama. Karena segitiga ABC dan ADC mempunyai satu sisi yang sama panjang yaitu sisi CA (814 m) maka peserta didik dapat menyimpulkan bahwa panjang CD adalah sama dengan panjang BC. Panjang sisi CD sama dengan 1.151 m.

6. a. Panjang sisi AC adalah 150 m.

$$\begin{aligned}\tan 60^\circ = 1,73 &= \frac{AC}{BC} \\ 1,73 &= \frac{150 \text{ m}}{BC} \\ BC &= \frac{150 \text{ m}}{1,73} \\ BC &= 86.71 \text{ m}\end{aligned}$$

- b. Panjang CD dapat dicari dengan:

$$125 \text{ m} - 86,71 \text{ m} = 38,29 \text{ m}$$

7. $\tan 3^\circ = \frac{200 \text{ m}}{x}$
 $0,05 = \frac{200 \text{ m}}{x}$
 $x = 4.000 \text{ m}$

8. a. $\tan 31^\circ = \frac{x}{400}$
 $x = 400 \times \tan 31^\circ = 240,34 \text{ m}$

- b. Strateginya tepat dan akan berguna untuk memastikan perhitungan yang akurat. Strategi ini berguna karena menggunakan penerapan perbandingan trigonometri yang sama dengan strategi awalnya. Ahli bangun melakukan hal tersebut untuk mencari data tambahan yang dapat memberikan konfirmasi atas data awalnya.

9. a. Panjang sisi depan dapat ditemukan dengan mencari nilai perbandingan trigonometri tangen.

$$\tan 34^\circ = \frac{x}{52 \text{ m}}$$

$$0,67 = \frac{x}{52 \text{ m}}$$

$$x = 34,84 \text{ m}$$

- b. Pernyataan teman Dimas tidak tepat. Panjang sisi depan tidak sama dengan tinggi tiang bendera karena tinggi Dimas perlu dimasukkan ke dalam perhitungan. Berdasarkan **Gambar 3.16** pada Buku Siswa, segitiga yang terbentuk bermula dari ketinggian mata Dimas. Maka, untuk mencari tinggi tiang bendera, kita harus menambahkan tinggi Dimas.

Proyek Pengayaan

Guru dapat memperkenalkan istilah sudut elevasi dan sudut depresi secara sederhana menggunakan contoh dan mengajak peserta didik membuat alat klinometer. Setelah selesai membuat klinometer, ajak peserta didik untuk berpikir kritis cara mengukur sudut yang akurat menggunakan alat ini. Berikan peserta didik waktu yang cukup untuk mencoba dan mengeksplorasi alat yang baru mereka buat. Minta pendapat beberapa peserta didik sebelum guru melanjutkan dengan memberi kesimpulan.

Untuk kegiatan mengukur, guru dapat memberikan ini sebagai tugas kelompok atau sebagai pekerjaan rumah. Menggunakan lembar kerja pada Buku Siswa, berikan beberapa kesempatan kepada peserta didik untuk mencoba mengukur tinggi beberapa objek yang berbeda-beda. Supaya pengalaman peserta didik dapat dimanfaatkan sebaik-baiknya, guru juga dapat meminta peserta didik menuliskan jurnal matematika dalam pengerjaan proyek ini.

B. Pemanfaatan Perbandingan Trigonometri



Kriteria Ketercapaian Tujuan Pembelajaran

- Peserta didik mampu menjelaskan manfaat perbandingan trigonometri dalam kehidupan sehari-hari
- Peserta didik mampu mencari solusi permasalahan sehari-hari dengan menerapkan perbandingan trigonometri (\sin , \cos , dan $\tan \theta$).



Sarana & Prasarana Pembelajaran

Sejumlah perangkat untuk membuka website GeoGebra



Pemanasan

Mulai aktivitas pembelajaran dengan menunjukkan gambar piramida kepada peserta didik dan menanyakan beberapa pertanyaan pemancing berikut.

- Apa yang kamu ketahui mengenai piramida?
- Menurutmu, apa kaitan piramida dengan perbandingan trigonometri?
- Apakah ada segitiga siku-siku pada bangun ruang piramida? Coba tunjukkan dengan gambar.

Guru dapat memberikan waktu kepada peserta didik untuk berdiskusi dengan teman sekelompoknya sebelum mereka diberi kesempatan untuk menyampaikan pendapatnya di depan kelas.

Setelah membaca kedua paragraf yang tertulis di Buku Siswa, perkenalkan kegiatan **Eksplorasi 3.2**. Pada kegiatan ini, peserta didik akan menggunakan imajinasinya untuk menentukan perubahan yang terjadi apabila sudut kemiringan pada piramida diperbesar atau diperkecil.

Berikut adalah jawaban dari pertanyaan-pertanyaan pada bagian **Eksplorasi 3.2**:

1. Jika sudut tetap sama tetapi ketinggian piramida berubah maka alas juga berubah. Makin besar ketinggian piramida makin besar setengah

diagonal alas. Hal ini terjadi karena perbandingan sisi depan terhadap sisi samping bersifat tetap.

2. Jika tinggi piramida tetap sama tetapi setengah diagonal alasnya berubah maka sudut akan berubah. Makin pendek setengah diagonal alas makin besar sudut. Hal ini terjadi karena perbandingan sisi depan (tinggi piramida) terhadap sisi samping (setengah diagonal alas) berubah sehingga sudut berubah.
3. Jika alas piramida sama tetapi tingginya berubah maka sudutnya berubah. Makin tinggi piramida makin besar sudut. Hal ini terjadi karena perbandingan sisi depan (tinggi piramida) terhadap sisi samping (setengah diagonal alas) berubah sehingga sudut berubah.

Berikan pertanyaan-pertanyaan lainnya.

- Jika sudut θ dibuat lebih besar, sedangkan panjang setengah diagonal alas dibuat tetap sama, bagaimana perubahan nilai perbandingan sisi depan dengan sisi sampingnya? **Nilai tangen akan bertambah besar.**
- Jika sudut θ dibuat lebih besar, sedangkan panjang sisi miring tetap sama, bagaimana perubahan nilai perbandingan sisi depan dengan sisi miring? **Nilai sinus akan bertambah besar.**
- Jika sudut θ dibuat lebih besar, sedangkan panjang sisi miring tetap sama, bagaimana perubahan nilai perbandingan sisi samping dengan sisi miring? **Nilai cosinus akan mengecil.**

Pastikan peserta didik diberikan waktu yang cukup untuk berlatih menyampaikan argumen matematis dengan runtut logika yang baik dan benar. Pada saat peserta didik sedang berdiskusi, tugas guru adalah berkeliling dan memberikan pertanyaan-pertanyaan pancingan untuk memperdalam diskusi dan pemikiran peserta didik.



Diferensiasi

Untuk peserta didik yang **kecepatan belajarnya tinggi (*advanced*)**, guru dapat memberikan mereka pertanyaan tambahan sebagai berikut.

Jika sudut θ dibuat lebih kecil, bagaimana perubahan nilai perbandingan sisi depan dan sisi sampingnya ($\tan \theta$)?

Jika sudut θ dibuat lebih kecil, bagaimana perubahan nilai perbandingan sisi depan dan sisi miring segitiga siku-siku?

Jika sudut θ dibuat lebih kecil, bagaimana perubahan nilai perbandingan sisi samping dan sisi miring segitiga siku-siku?

1. Perbandingan Trigonometri dalam Piramida

Kaitkan dua pertanyaan paling akhir pada bagian **Eksplorasi 3.2** untuk memperkenalkan nilai perbandingan sinus dan cosinus. Gunakan contoh penerapan perbandingan trigonometri sinus dan cosinus dalam konteks bangun piramida untuk menjelaskan arti/definisinya. Ajak peserta didik untuk berefleksi tentang perbedaan dan persamaan antara perbandingan trigonometri sin, cos, dan tan.

Contoh soal mengenai Wanimbo yang sedang bermain layangan adalah salah satu contoh soal HOTS. Setelah membaca persoalannya, minta peserta didik berpikir kritis mengenai perbandingan trigonometri mana yang cocok untuk diterapkan dalam penyelesaian masalah ini. Minta peserta didik berdiskusi dalam kelompoknya sebelum dibawa ke pembahasan seluruh kelas. Lakukan prosedur yang sama untuk diskusi mengenai jawaban Surya yang salah. Jika pada akhirnya kebanyakan peserta didik tidak dapat mencapai kesimpulan yang diinginkan, guru dapat meminta peserta didik untuk menjelaskan alasan mengapa jawaban Surya salah kepada teman sebangkunya.

Jawaban contoh soal

Solusi yang diberikan Surya tidak tepat karena ia tidak memperhitungkan ketinggian ujung layangan sejauh 60 cm dari permukaan tanah. Ujung layangan tidak berada pada dasar tanah, melainkan digenggam oleh Wanimbo di ketinggian 60 cm. Seharusnya, tinggi layangan yang digunakan dalam persamaan Surya perlu dikurangi 60 cm terlebih dahulu.

$$\begin{aligned}3,5 \text{ m} - 60 \text{ cm} &= 2,9 \text{ m} \\ \sin 20^\circ = 0,34 &= \frac{2,9 \text{ m}}{x \text{ m}} \\ x &= 8,53 \text{ m}\end{aligned}$$

Kunci Jawaban Latihan 3.5

1. a. Aku tahu bahwa $\sin \theta = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi miring}}$

Aku tahu $\angle P = 53,2^\circ$

Sisi depan $\angle P$ adalah sisi QR yang panjangnya 4 unit.

Sisi miring (hipotenusa) segitiga siku-siku ini adalah sisi PQ yang panjangnya 5 unit.

Jadi, $\sin 53,2^\circ = \frac{4}{5}$

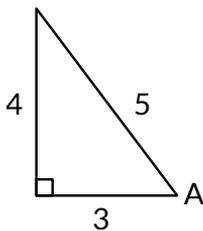
b. Aku tahu bahwa $\cos \theta = \frac{\text{sisi samping}}{\text{sisi miring}}$

Aku juga tahu sisi QR adalah sisi samping $\angle Q = 36,8^\circ$

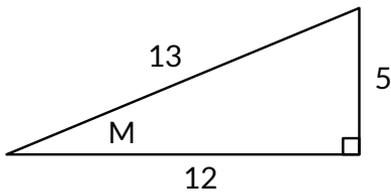
$$\cos 36,8^\circ = \frac{QR \text{ (sisi samping)}}{QP \text{ (sisi miring/hipotenusa)}}$$

jadi jawabannya adalah **ii. $\cos 35,8^\circ$**

2.



3.



4. Contoh jawaban yang tepat:

Sinus adalah nilai perbandingan sisi depan dan sisi miring suatu sudut pada segitiga siku-siku. Nilai sinus ditentukan oleh besaran sudut dan dapat diterapkan pada segitiga siku-siku dengan ukuran berbeda-beda.

5. Contoh jawaban yang tepat:

Cosinus adalah nilai perbandingan sisi samping dan sisi miring suatu sudut pada segitiga siku-siku. Nilai cosinus ditentukan oleh besaran

sudut dan dapat diterapkan pada segitiga siku-siku dengan ukuran berbeda-beda.

2. Tiga Serangkai Perbandingan Trigonometri

Bagian ini bertujuan membantu peserta didik dalam merangkum atau menyimpulkan ketiga perbandingan trigonometri yang telah dipelajari oleh peserta didik. Guru perlu memastikan bahwa peserta didik memahami arti perbandingan trigonometri sebagai nilai perbandingan. Berikan waktu kepada peserta didik untuk menuliskan artinya sendiri-sendiri kemudian minta peserta didik menukarkan tulisannya secara acak. Peserta didik yang menerima jawaban temannya harus memberikan penilaian mengenai ketepatan jawaban dengan memberikan usul tambahan atau catatan.

Dalam kegiatan **Ayo, Menggunakan Teknologi**, berikan panduan untuk peserta didik melakukan kegiatan sesuai dengan arahan yang tertulis. Visualisasi yang dapat dilakukan pada media pembelajaran ini diharapkan dapat memperdalam dan memperkaya pengertian peserta didik bahwa perbandingan trigonometri adalah nilai perbandingan. Kegiatan ini mungkin akan sangat bermanfaat bagi peserta didik yang sulit mengerti atau belum sepenuhnya mempunyai pemahaman yang benar. Himbau peserta didik yang membutuhkan untuk mencoba kegiatan ini kembali di rumah saat mereka luang.

3. Sudut Istimewa Perbandingan Trigonometri

Pimpin peserta didik untuk melakukan kegiatan **Eksplorasi 3.3** untuk melengkapi tabel sudut istimewa perbandingan trigonometri.

Jawaban untuk tabel

| | 30° | 45° | 60° |
|-----|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| sin | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ |
| cos | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$ |
| tan | $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ |

Setelah menemukan jawaban untuk tabel sudut istimewa, guru dapat memberikan beberapa saran agar peserta didik tidak perlu menghafal isi tabel tetapi menggambarkan segitiga siku-siku sama kaki dengan panjang sisi 1 satuan dan segitiga samasisi dengan panjang sisi 2 satuan. Ingatkan peserta didik akan subbab sebelumnya, bahwa ia sudah mengerjakan soal yang membuktikan bahwa nilai sin dari sebuah sudut lancip segitiga siku-siku sama dengan nilai cos dari sudut lancip satunya.



Diferensiasi

Bagikan prinsip berikut kepada peserta didik, khususnya **yang memiliki kesulitan dalam menentukan perbandingan trigonometri yang tepat untuk diterapkan dalam konteks tertentu.**

Dalam setiap permasalahan trigonometri, akan ada satu bilangan yang diketahui (misalnya x). Perbandingan trigonometri yang digunakan biasanya adalah yang mengandung bilangan x sebagai salah satu komponennya.

Sebelum mengerjakan persoalan, identifikasi segitiganya dan sudut pada segitiga siku-siku. Pastikan perbandingan trigonometri yang digunakan akan mencapai jawaban yang diinginkan.

Untuk peserta didik **yang kesulitan dalam membedakan nilai perbandingan sinus, cosinus, dan tangen**, berikan latihan-latihan sederhana maupun singkatan yang membantu ingatan (*mnemonic*). Guru dapat menggunakan video Youtube (pada menit ke 7.35-9.35) dengan memindai kode QR berikut.



<https://buku.kemdikbud.go.id/s/eue8pk>

Kunci Jawaban Latihan 3.6

1. $8\sqrt{2}$

Jawaban **Ayo, Mandiri**: $10\sqrt{2}$ cm

2. a. Segitiga yang sudut-sudutnya demikian memiliki perbandingan sisi $1 : \sqrt{3} : 2$. Asalkan jawabannya memiliki perbandingan demikian (pada soal tidak diminta mengurutkan) maka jawaban dapat diterima.

Contoh jawaban yang tepat: 6 cm, 3 cm, $3\sqrt{3}$ cm

- b. Tidak mungkin. Perbandingan salah satu sisi segitiga dengan sisi miringnya harus setengahnya, sedangkan 5 cm bukan setengah dari 15 cm
- Berdasarkan perbandingan sisi segitiga dengan sudut demikian, jika dua dari sisi yang diberikan benar, maka seharusnya sisi-sisinya adalah 5 cm, $5\sqrt{3}$ cm, dan 10 cm.

Kunci Jawaban Latihan 3.7

1. $z = 18,4$ dan $x = 15,94$
2. a. Sisi depan = sisi CB, sisi samping = sisi CA, sisi miring = sisi AB

b. $\sin \theta = \frac{12}{13}$

c. $\cos \theta = \frac{5}{13}$

3. a.

| | |
|---|---|
| $\sin 56,3^\circ = \frac{3}{\sqrt{13}}$ atau 0.83 | $\sin 33,7^\circ = \frac{2}{\sqrt{13}}$ atau 0.55 |
| $\cos 56,3^\circ = \frac{2}{\sqrt{13}}$ atau 0.55 | $\cos 33,7^\circ = \frac{3}{\sqrt{13}}$ atau 0.83 |

- b. $\sin 56,3^\circ$ sama dengan $\cos 33,7^\circ$. Kemudian, $\sin 33,7^\circ$ sama dengan $\cos 56,3^\circ$. Hal ini terjadi karena kedua sudut lancip pada segitiga siku-siku terletak berseberangan sehingga sisi depan salah satu sudut lancipnya sama dengan sisi samping sudut lancip yang satunya.



Ayo, Berpikir Kritis

Setelah peserta didik selesai mencoba mencari pola secara mandiri atau dengan bekerja sama, guru menjelaskan bahwa sudut komplementer akan memiliki nilai sinus dan cosinus yang sama.

4. $x = 4$, $y = 4\sqrt{3}$, $z = 2\sqrt{6}$
5. Tinggi gedung = $40\sqrt{3}$ meter
6. a. Saya tidak setuju. Mencari $\sin 30^\circ$ tidak akan menolong Desi untuk menemukan panjang x . Panjang sisi yang perlu diketahui adalah sisi samping 30° , maka yang lebih bermanfaat adalah mencari $\cos 30^\circ$.
- b. $\frac{9}{4}$

7. Pada dasarnya peserta didik harus menggambar dua segitiga siku-siku yang membentuk persegi dengan dua sudut lancip istimewa yaitu 30° dan 60° .

Dengan merujuk ke tabel sudut istimewa perbandingan trigonometri, persamaan untuk mencari panjang persegi panjang adalah

Lebar persegi dibagi dengan $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

8. Dua nilai yang harus dicari peserta didik adalah jarak antara laki-laki dan tiang serta jarak antara pohon dan tiang. Kemudian, peserta didik dapat melakukan operasi pengurangan untuk menemukan jarak antara laki-laki dan pohon.

Jarak antara laki-laki dengan tiang adalah 50 m (karena $\tan 45^\circ = 1$).

Jarak antara pohon dan tiang dapat dicari dengan menggunakan nilai perbandingan trigonometri $\tan 60^\circ$.

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3} = \frac{50 \text{ meter}}{x}$$
$$x = 28,87 \text{ meter}$$

Jarak antara laki-laki dan pohon = 50 meter – 28,87 meter = 21,13 meter.

Pengayaan

Penjelasan bagian Pengayaan dapat diakses melalui tautan berikut.

<https://buku.kemdikbud.go.id/s/vinjww>



Kunci Jawaban

Uji Kompetensi

- $\sin x = \frac{21}{29}$ dan $\tan x = \frac{21}{20}$
- Panjang sisi persegi = $9\sqrt{2}$

3. Supaya tangga berada tepat di luar jendela lantai 3, ketinggian tangga harus pada 6.4 meter (tinggi dua lantai). Untuk mencari panjang tangga, peserta didik perlu menggunakan nilai perbandingan trigonometri $\sin 75^\circ$.

$$0,96 = \frac{6,4 \text{ meter}}{x}$$

$x = 6,67$ meter Jadi, panjang tangga harus sekitar 6,67 meter.

4. Perkataan Tomi benar. Sisi depan pada $\sin A$ sama dengan sisi samping pada $\cos B$. Selain itu, sisi miring segitiga tetap sama pada kedua nilai perbandingan yaitu panjang sisi BA. Oleh karena kesamaan sisi yang dirujuk inilah kita dapat menyimpulkan $\cos B = \sin A$.
5. a. Berdiri di depan tugu Jam Gadang dengan membawa klinometer sederhana. Hitung sudut elevasinya. Hitung juga jarak antara pengukur dan tugu Jam Gadang. Jangan lupa catat tinggi pengukurnya yang perlu ditambahkan untuk menemukan hasil akhir yang akurat. Dengan menggunakan nilai perbandingan tangen sudut elevasi dan menambahkan tinggi badan pengukur, ia akan menemukan tinggi Jam Gadang.
- b. Cari sebuah titik di seberang sungai yang mencolok dan dapat dijadikan objek rujukan. Posisikan diri tepat di seberang objek rujukan dan jalan sambil mengukur jarak yang ditempuh. Berhenti di suatu titik yang diinginkan dan gunakan alat busur untuk menghitung sudut perputaran agar pengukur dapat menatap objek rujukannya. Dengan menggunakan nilai perbandingan tangen, pengukur dapat menemukan lebar sungai dan menentukan panjang jembatan yang perlu dibangun.

Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Republik Indonesia, 2023

**Panduan Guru Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas X
(Edisi Revisi)**

Penulis: Dicky Susanto, dkk.
ISBN: 978-623-118-562-4

Bab

4

Panduan Khusus

Sistem Persamaan dan Pertidaksamaan Linear



Bagaimana menggunakan sistem persamaan/pertidaksamaan linear untuk menyelesaikan masalah?

Pendahuluan

Setelah mempelajari bab ini, peserta didik diharapkan dapat memodelkan masalah ke dalam sistem persamaan linear dan sistem pertidaksamaan linear serta menyelesaikannya.

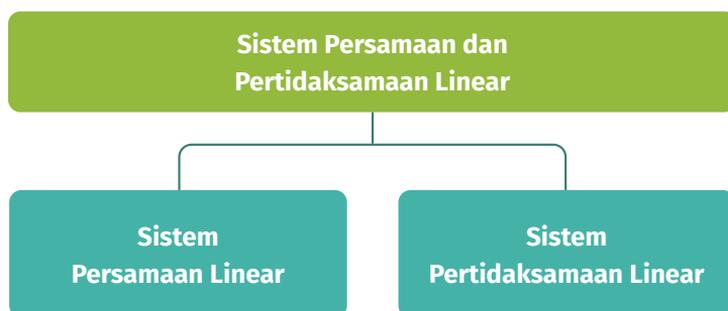
Untuk memastikan bahwa tujuan pembelajaran telah tercapai, beberapa kriteria berikut dapat digunakan:

- Peserta didik mampu membuat model matematika dari masalah terkait sistem persamaan linear
- Peserta didik mampu menyelesaikan sistem persamaan linear dengan tiga variabel
- Peserta didik mampu membuat model matematika dari masalah terkait sistem pertidaksamaan linear
- Peserta didik mampu menyelesaikan sistem pertidaksamaan linear dengan dua variabel

Bab Sistem Persamaan dan Pertidaksamaan Linear bertujuan untuk mengembangkan kemampuan peserta didik agar dapat memahami dan bernalar mengenai sistem persamaan dan pertidaksamaan linear. Peserta didik akan dapat memodelkan masalah yang berkaitan dengan sistem persamaan dan pertidaksamaan linear serta menyelesaikannya. Mereka membangun pemahaman berdasarkan sistem persamaan linear dengan dua variabel yang sudah dipelajari di SMP.

Pemahaman sistem persamaan dan pertidaksamaan linear dalam bab ini terkait dengan mencari persamaan kurva pada sistem koordinat, matriks, dan program linear. Bab ini juga terkait dengan mata pelajaran Fisika dan Ekonomi.

Peta Materi



Bab ini disarankan diselesaikan dalam 15 JP, namun guru dapat menyesuaikan dengan kondisi satuan pendidikan setempat dengan memperhitungkan keragaman kondisi, potensi, kemampuan individu peserta didik, dan dinamika kelas.

Konsep dan Keterampilan Prasyarat

Keterampilan prasyarat yang perlu dimiliki peserta didik adalah menyelesaikan sistem persamaan linear dengan dua variabel melalui berbagai cara untuk penyelesaian masalah. Materi tersebut termuat dalam Capaian Pembelajaran Fase D. Jika ada peserta didik yang kesulitan, guru dapat merujuk pada buku teks utama Matematika fase D.

Penyajian Materi Esensial

Pada subbab A dibahas sistem persamaan linear dengan tiga variabel. Untuk penyelesaian sistem persamaan linear dengan menggunakan matriks akan dibahas di kelas selanjutnya saat mempelajari matriks. Pada subbab B dibahas sistem pertidaksamaan linear dua variabel, namun tidak membahas program linear yang tidak termuat dalam Capaian Pembelajaran.

Apersepsi

Perkenalkan bab ini dengan contoh-contoh permasalahan yang dapat diselesaikan dengan sistem persamaan linear dan meminta peserta didik menyebutkan contoh-contoh lain yang ada di dalam kehidupan mereka sehari-hari.

Penilaian Sebelum Pembelajaran

Ingatkan peserta didik tentang materi sistem persamaan linear dengan dua variabel yang telah mereka pelajari di SMP. Guru dapat menggunakan soal yang ada di bagian **Ayo, Mengingat Kembali** sebagai asesmen awal. Guru juga dapat memberikan soal-soal lain yang sejenis.

Panduan Pembelajaran

A. Sistem Persamaan Linear



Kriteria Ketercapaian Tujuan Pembelajaran

- Peserta didik mampu membuat model matematika dari masalah terkait sistem persamaan linear
- Peserta didik mampu menyelesaikan sistem persamaan linear dengan tiga variabel



Sarana & Prasarana Pembelajaran

- Timbangan
- Dua bola basket, dua bola kaki, tiga bola voli (dapat diganti sesuai ketersediaan di sekolah, asalkan benda yang jenisnya sama beratnya juga sama)
- Buku berpetak untuk menggambar grafik sistem koordinat.
- Lebih baik jika bisa memanfaatkan teknologi informasi seperti aplikasi GeoGebra dan Desmos.



Apersepsi

Perkenalkan bab ini dengan contoh-contoh permasalahan yang dapat diselesaikan dengan sistem persamaan linear dan meminta peserta didik menyebutkan contoh-contoh lain yang ada di dalam kehidupan mereka sehari-hari.

Ingatkan peserta didik tentang materi sistem persamaan linear dengan dua variabel yang telah mereka pelajari di SMP. Guru dapat menggunakan soal yang ada di bagian **Ayo, Mengingat Kembali** sebagai asesmen awal. Guru juga dapat memberikan soal-soal lain yang sejenis.

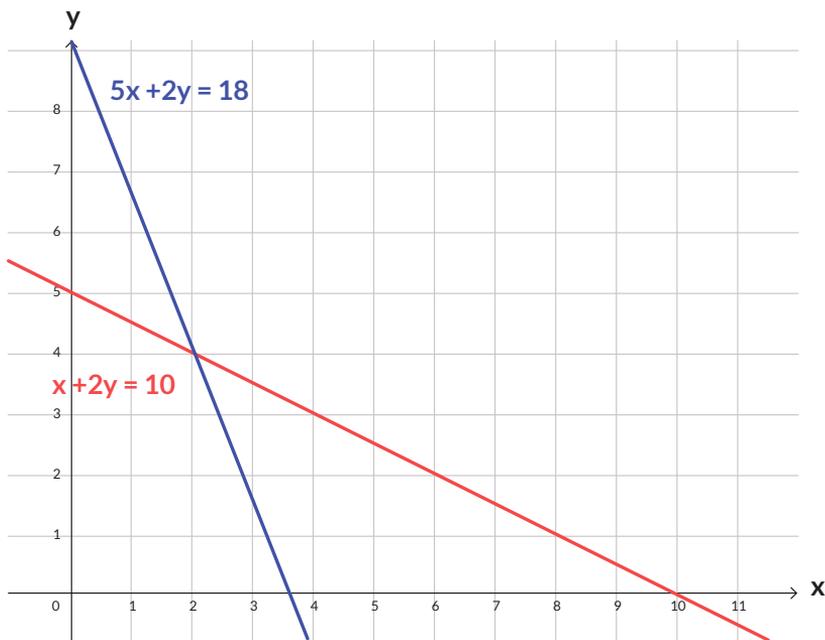
Alternatif Penyelesaian:

Jika b menyatakan harga sebuah buku tulis dan p menyatakan harga sebuah pensil maka model matematikanya (dalam ribuan rupiah) adalah

$$\begin{cases} 5b + 2p = 18 \\ b + 2p = 10 \end{cases}$$

Model matematika tersebut terdiri atas dua persamaan dengan dua variabel. Semua variabelnya berpangkat satu, artinya kedua persamaan di atas adalah persamaan linear. Solusi dari sistem persamaan linear tersebut menyatakan harga buku dan harga pensil.

Grafik dari sistem persamaan linear tersebut ditampilkan pada **Gambar 4.1**.



Gambar 4.1 Grafik Sistem Persamaan Linear Permasalahan Harga Pensil dan Buku

Solusi dari sistem persamaan linear adalah koordinat titik potong kedua garis. Peserta didik dapat memasukkan nilai $b = 2$ dan $p = 4$ ke dalam persamaan dan melihat bahwa harga tersebut membuat kedua persamaan benar. Harga buku Rp2.000,00 dan harga pensil Rp4.000,00.

Jika dirasa perlu, guru dapat mengingatkan peserta didik bahwa selain dengan grafik, sistem persamaan linear dapat pula diselesaikan dengan metode eliminasi dan substitusi untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dua variabel.

- **Metode eliminasi**

Eliminasi artinya menghilangkan. Eliminasi variabel p dapat dilakukan dengan cara

$$\begin{array}{r} 5b + 2p = 18 \\ b + 2p = 10 \quad \text{---} \\ \hline 4b = 8 \\ b = 2 \end{array}$$

- **Metode substitusi**

Substitusi artinya menggantikan. Contoh penggunaannya:
Dari persamaan kedua didapat

$$\begin{aligned} b + 2p &= 10 \\ b &= 10 - 2p \end{aligned}$$

Nilai b disubstitusi ke persamaan pertama

$$\begin{aligned} 5b + 2p &= 18 \\ 5(10 - 2p) + 2p &= 18 \\ 50 - 10p + 2p &= 18 \\ -8p &= -32 \\ p &= 4 \end{aligned}$$

Apakah ada cara lain untuk menyelesaikan sistem persamaan linear? Ya, tetapi pembahasan di fase E cukup sampai di sini.

Pertanyaan-pertanyaan berikut juga dapat digunakan untuk mengaktifkan prapengetahuan peserta didik.

- Apa yang kamu ketahui tentang sistem persamaan linear? Berikan contoh.
- Bagaimana menyelesaikan sistem persamaan linear?
- Bagaimana menentukan variabel?
- Apakah semua sistem persamaan linear memiliki solusi?
- Bagaimana menggambar grafik sistem persamaan linear?

Mungkin peserta didik tidak bisa menjelaskan dengan sempurna, namun guru bisa mendapat gambaran sejauh apa pengetahuan peserta didik. Bila ada peserta didik yang mengalami kesulitan, guru perlu mengidentifikasi kesulitan yang dialami:

- Kesulitan dalam membuat model matematika (kesulitan menerjemahkan masalah ke dalam persamaan matematika). Guru dapat memberi penguatan tentang mengidentifikasi variabel dan menerjemahkan masalah ke dalam persamaan matematika.
- Kesulitan menyelesaikan sistem persamaan linear dengan dua variabel. Guru dapat memberi penguatan tentang metode penyelesaian sistem persamaan linear. Jika membutuhkan referensi, guru dapat merujuk pada buku teks utama Matematika Fase D.



Diferensiasi

Jika ada peserta didik yang tertarik, dapat diarahkan untuk mempelajari representasi sistem persamaan linear ke dalam matriks dan penyelesaian dengan metode eliminasi Gauss/Gauss-Jordan.

Selain itu, ajak mereka untuk memikirkan:

- Bagaimana mengubah permasalahan menjadi sistem persamaan/pertidaksamaan linear?
- Apa artinya mencari solusi?
- Solusi sistem persamaan/pertidaksamaan linear ini menyatakan apa?
- Bagaimana mengenali apakah sebuah model matematika adalah sistem persamaan linear?

6. Sistem persamaan linear dengan dua variabel

$$\begin{array}{rcl}
 3x + 4z = 2950 & | \times 1 | & 3x + 4z = 2950 \\
 2x + z = 1550 & | \times 4 | & 8x + 4z = 6200 \\
 \hline
 & & -5x = -3250
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 3x + 4z = 2950 & | \times 1 | & 3x + 4z = 2950 \\
 2x + z = 1550 & | \times 4 | & 8x + 4z = 6200 \\
 \hline
 & & -5x = -3250 \\
 & & x = 650
 \end{array}$$

7. Solusinya adalah $x = 650$, $y = 450$, dan $z = 250$. Berat bola basket 650 g, berat bola kaki 450 g, dan berat bola voli 250 g.
8. Jika terdapat perbedaan hasil penimbangan dengan hasil perhitungan, bantu peserta didik untuk menelusuri di mana letak kesalahannya. Beberapa kemungkinan penyebab perbedaan:
 - Kesalahan saat penimbangan
 - Kesalahan penghitungan
 - Benda yang sejenis beratnya berbeda
9. Substitusi masing-masing nilai ke sistem persamaan linear awal menghasilkan kalimat yang benar.
10. Cara yang berbeda akan menghasilkan jawaban yang sama karena permasalahannya memang sama. Baik metode eliminasi maupun substitusi dapat digunakan (mungkin juga metode lain)

11.



Ayo, Berpikir Kritis

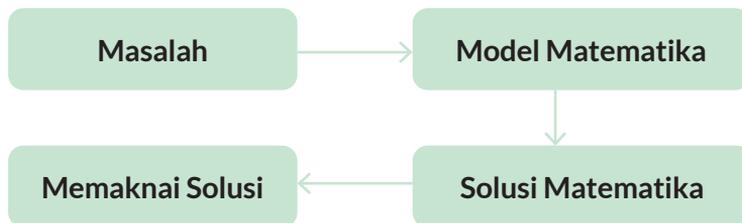
Dibutuhkan 3 persamaan untuk membentuk sistem persamaan linear dengan 3 variabel. (Demikian pula dibutuhkan 4 persamaan untuk membentuk sistem persamaan linear dengan 4 variabel).

12. Karena persamaan ketiga tidak mengandung variabel y .
13. Dapat. Solusi yang didapatkan akan sama. Prosesnya akan lebih panjang (diperlukan 2 proses eliminasi untuk mendapatkan sistem persamaan linear dengan dua variabel).



Kaitkan hasil eksplorasi peserta didik dengan prapengetahuan tentang sistem persamaan linear dengan dua variabel. Bahaslah penyelesaian permasalahan tersebut dengan sistem persamaan linear tiga variabel.

1. Membuat model matematika. Teknologi dapat memudahkan manusia untuk menyelesaikan sistem persamaan linear, namun proses membuat model matematika harus dilakukan oleh manusia. Dipastikan bahwa peserta didik mampu melakukan hal sebagai berikut.
 - a. Menentukan variabel.
 - b. Membuat model matematika.
 - c. Menentukan apakah model matematika tersebut merupakan sistem persamaan linear.
2. Menyelesaikan sistem persamaan linear. Ingatkan peserta didik dengan metode eliminasi dan substitusi yang pernah dipelajari saat belajar sistem persamaan linear dengan dua variabel. Perbedaannya adalah dibutuhkan eliminasi dan substitusi yang lebih sering.
3. Setelah mendapatkan solusi, peserta didik perlu menjelaskan makna solusi ini dalam konteks permasalahan yang ada.



Miskonsepsi

Mungkin ada beberapa peserta didik yang masih belum memahami bahwa tanda = bukanlah operator, melainkan tanda yang menunjukkan kesamaan. Peserta didik diharapkan juga telah memahami bahwa operasi apapun yang dilakukan di ruas kiri, harus dilakukan juga di ruas kanan untuk mempertahankan kesamaan. Beberapa kesalahan yang cukup sering muncul:

$$2x + 3 = 4$$

$$x + 3 = 2$$



Diferensiasi

Sebagaimana pada sistem persamaan linear dengan dua variabel ada 3 kemungkinan banyaknya (pasangan) jawaban, demikian juga pada sistem persamaan linear dengan tiga variabel ada 3 kemungkinan banyaknya (set) jawaban. Hanya saja representasi grafiknya lebih sulit karena membutuhkan grafik tiga dimensi. Untuk memahami lebih lanjut mengenai banyaknya solusi yang berbeda-beda itu, ajak peserta didik untuk mengerjakan **Latihan 4.1** nomor 1 sampai 3.

Kunci Jawaban Latihan 4.1

- Jika k : panjang tongkat kasti, h : panjang tongkat hoki, dan b : panjang tongkat bisbol.

 - $3k + 2h + b = 455$

$$\begin{cases} 3k + 2h + b = 455 \\ k + 3h + 2b = 545 \\ 2k \quad \quad - b = 0 \end{cases}$$
 - $$\begin{array}{r} 3k + 2h + b = 455 \quad | \times 3 | \quad 9k + 6h + 3b = 1365 \\ k + 3h + 2b = 545 \quad | \times 2 | \quad 2k + 6h + 4b = 1090 \\ \hline \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 7k \quad \quad - b = 275 \end{array}$$
 - Ya, sebuah sistem persamaan linear, karena semua variabelnya berpangkat satu.
 - $$\begin{array}{r} 7k - b = 275 \\ 2k - b = 0 \\ \hline 5k \quad \quad = 275 \\ k \quad \quad = 55 \end{array}$$
 - Ada **satu solusi**, yaitu $k = 55$, $h = 90$, dan $b = 110$.
 - Tongkat kasti panjangnya 55 cm, tongkat hoki panjangnya 90 cm, dan tongkat bisbol panjangnya 110 cm.
- Jika digunakan variabel k volume kemasan kecil, s volume kemasan sedang, dan b volume kemasan besar (semua volume dalam ml).

 - Sistem persamaannya
$$\begin{cases} 3k + 2s + 3b = 4700 \\ 3k + s + 2b = 3300 \\ \qquad \quad 2s + 2b = 2800 \end{cases}$$

- b. Semua variabel pada sistem persamaan tersebut berpangkat satu, maka sistem persamaan tersebut adalah sistem persamaan linear.
- c. Eliminasi persamaan pertama dan persamaan kedua.

$$\begin{array}{r} 3k + 2s + 3b = 4700 \\ 3k + s + 2b = 3300 \\ \hline s + b = 1400 \end{array}$$

Persamaan yang dihasilkan adalah persamaan yang sama dengan persamaan ketiga dalam sistem persamaan linear (seluruh persamaan dikalikan 2).

- d. Proses pada (c) menghasilkan persamaan yang sama dengan persamaan ketiga (grafiknya berupa dua garis berimpit), maka sistem persamaan linear ini memiliki **banyak solusi**.
 - e. Ada banyak kemungkinan volume kemasan kecil, sedang, dan besar, contohnya $k = 366,66, s = 600, b = 800$ adalah solusi, $k = 333,33, s = 500, b = 900$ juga solusi.
3. Jika j adalah harga tiap kg jeruk, p adalah harga tiap kg pepaya, dan s adalah harga tiap kg salak (semua harga dalam ribu rupiah), maka sistem persamaannya adalah:

$$\begin{cases} 3j + 3p + s = 130 \\ 2j + 2p + s = 100 \\ j + p = 50 \end{cases}$$

- b. Sistem persamaan linear karena semua variabelnya berpangkat satu.
- c. Eliminasi persamaan pertama dan kedua diperoleh:

$$\begin{array}{r} 3j + 3p + s = 130 \\ 2j + 2p + s = 100 \\ \hline j + p = 30 \end{array}$$

Bandungkan persamaan ini dengan persamaan ketiga.

- d. Grafiknya berupa dua garis yang sejajar, maka sistem persamaan linear ini adalah sistem persamaan linear yang **tidak memiliki solusi**.
 - e. Harga buah-buahan di setiap paket berbeda-beda.
4. Bukan sistem persamaan linear, ada variabel x^2
- a. Bukan sistem persamaan linear, ada variabel x^2, y^2, z^2

- b. Sistem persamaan linear, semua variabel berpangkat 1.
- c. Bukan sistem persamaan linear, ada variabel $\frac{1}{z}$
- d. Sistem persamaan linear, semua variabel berpangkat 1.
5. Jika a adalah harga 1 kg beras A, b harga 1 kg beras B, dan c adalah harga 1 kg beras C, maka
- a.
$$\begin{cases} 2a + 2b + c = 50 \\ 4a + 2b + 3c = 91 \\ 4a + 4b + 2c = 95 \end{cases}$$
- b. Sistem persamaan linear karena semua variabelnya berpangkat satu.
- c.
$$\begin{array}{r} 2a + 2b + c = 50 \quad | \times 2 | \quad 4a + 4b + 2c = 100 \\ 4a + 4b + 2c = 95 \quad | \times 1 | \quad 4a + 4b + 2c = 95 \\ \hline \end{array}$$

Perhatikan bahwa ruas kiri kedua persamaan sama sedangkan ruas kanannya berbeda. Ini adalah ciri sistem persamaan linear yang tidak memiliki solusi.



Diferensiasi

Jika ada peserta didik yang levelnya *advanced* ingin mencoba memvisualkan hal ini, arahkan untuk bereksplorasi dengan memanfaatkan teknologi (kalkulator grafik/aplikasi) untuk menggambar grafik. Pada jenjang lebih tinggi, banyaknya solusi diselidiki dengan menguji rank matriks yang bersesuaian.

Bagi peserta didik yang mengalami kesulitan, pertanyaan-pertanyaan ini dapat digunakan untuk menuntun.

Pemilihan variabel. Ajak peserta didik memikirkan bagaimana menentukan variabel yang digunakan. Ajak peserta didik berpikir tentang:

Apa yang diketahui?

Apa yang ditanya?

Jika saya memilih [suatu hal] sebagai variabel, apakah informasi-informasi yang ada dapat dituliskan model matematikanya?

Apakah hal yang ditanyakan dapat dinyatakan dalam variabel yang ada?

Menentukan model matematika. Ajak peserta didik untuk ‘menerjemahkan’ informasi dalam soal menjadi persamaan-persamaan matematika. Bisa jadi ada peserta didik yang kurang tepat memilih variabel sehingga tidak dapat membuat persamaan-persamaan matematika. Ajak peserta didik untuk meninjau ulang variabel yang dipilih.

Ajak peserta didik untuk menguji apakah persamaan-persamaan yang ada merupakan sistem persamaan linear. Linear artinya semua variabel berpangkat 1. Persamaan artinya semua kalimat matematika memuat tanda =. Sistem artinya semua persamaan serentak atau simultan sehingga solusi harus memenuhi semua persamaan.

Bahaslah mengenai metode eliminasi dan substitusi dalam menyelesaikan sistem persamaan linear. Alternatif penyelesaian yang ditampilkan pada Buku Siswa ditampilkan dengan metode substitusi.



Ayo, Berefleksi

Tutup pembelajaran dengan meminta peserta didik melakukan refleksi terhadap apa yang sudah mereka pelajari dengan menjawab pertanyaan refleksi.

B. Sistem Pertidaksamaan Linear



Kriteria Ketercapaian Tujuan Pembelajaran

- Peserta didik mampu membuat model matematika dari masalah terkait sistem pertidaksamaan linear
- Peserta didik mampu menyelesaikan sistem pertidaksamaan linear dengan dua variabel



Sarana & Prasarana Pembelajaran

- Buku berpetak untuk menggambar grafik sistem koordinat.
- Lebih baik jika bisa memanfaatkan teknologi informasi seperti aplikasi GeoGebra dan Desmos.



Apersepsi

Ingatkan peserta didik tentang materi pertidaksamaan linear yang telah mereka pelajari di SMP. Ajak mereka berpikir bahwa jika beberapa persamaan linear dapat membentuk sistem persamaan linear, dapatkan beberapa pertidaksamaan linear membentuk sistem pertidaksamaan linear?



Pemanasan

Mulai aktivitas pembelajaran dengan membahas timbangan dua lengan. Mungkin peserta didik mengenali ini sebagai timbangan yang biasa digunakan di pasar. Minta peserta didik melakukan **Eksplorasi 4.2**.

Eksplorasi 4.2 Menimbang Buah

Jika di sekolah ada timbangan bebek (mungkin milik Laboratorium Fisika), dapat dibawa ke kelas. Alternatifnya, dapat ditunjukkan gambar timbangan bebek dan jelaskan cara kerjanya.

1. Untuk strategi coba dan perbaiki, dorong peserta didik untuk berani mencoba. Jika hasilnya salah, perbaiki tebakan, ulangi sampai mendapatkan hasil yang sesuai. Berikut ini contoh tabel yang sudah diisi. Perhatikan bahwa ada lebih dari 1 (set) kemungkinan jawaban.

| Berat 1 Apel | Berat 1 Jeruk | Berat 2 Apel dan 5 Jeruk | Berat 6 Apel dan 2 Jeruk |
|--------------|---------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 1 | 7 | 8 |
| 2 | 1 | 9 | 14 |
| 3 | $\frac{1}{2}$ | $8\frac{1}{2}$ | 19 |

Pada bagian eksplorasi, biarkan peserta didik mencoba dan tidak dituntut pasti mendapatkan jawabannya. Tampung semua usul dan uji apakah memenuhi permasalahan yang diberikan.



Kaitkan hasil eksplorasi peserta didik dengan prapengetahuan tentang sistem persamaan linear dengan dua variabel. Tantang peserta didik untuk membuat model matematikanya. Perhatikan tanda ketidaksamaan yang peserta didik gunakan. Apakah tepat?

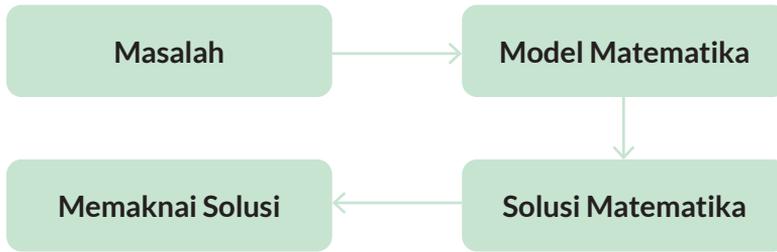
Bandingkan dengan model matematika yang dituliskan pada Buku Siswa.

Tunjukkan bahwa model matematika tersebut adalah sistem pertidaksamaan linear.

- linear: semua variabelnya berpangkat 1,
- pertidaksamaan: kedua ruas terhubung dengan tanda ketidaksamaan (dapat berupa tanda “ \neq ”, “ $<$ ”, atau “ $>$ ”),
- sistem: semua pertidaksamaan serentak atau simultan, sehingga solusi memenuhi semua pertidaksamaan.

Ingatkan peserta didik akan proses berpikir

1. Membuat model matematika. Teknologi dapat memudahkan manusia untuk menyelesaikan sistem persamaan linear, namun proses membuat model matematika harus dilakukan oleh manusia. Dipastikan peserta didik mampu melakukan hal sebagai berikut.
 - a. Menentukan variabel.
 - b. Membuat model matematika.
 - c. Menentukan apakah model matematika tersebut merupakan sistem pertidaksamaan linear.
2. Menyelesaikan sistem pertidaksamaan linear
 - a. Menyelesaikan sistem persamaan linear dan menggambar grafiknya.
 - b. Menentukan daerah hasil masing-masing pertidaksamaan.
 - c. Menentukan daerah yang merupakan irisan dari semua daerah hasil. Inilah daerah hasil sistem pertidaksamaan linear.
3. Setelah mendapatkan solusi, peserta didik perlu menjelaskan makna solusi ini dalam konteks permasalahan yang ada.



Ayo, Berpikir Kritis

- a. Ya
- b. Tidak

Pada **Eksplorasi 4.2**, penekanannya adalah peserta didik dapat membuat sistem pertidaksamaan linear (penyelesaian hanya merupakan hasil tebak dan perbaiki). Pada **Eksplorasi 4.3** diharapkan peserta didik dapat melangkah lebih jauh dengan menentukan daerah hasil sistem pertidaksamaan linear. Bahaslah **Eksplorasi 4.3** dan tuntun peserta didik untuk menggambar grafik dan menentukan daerah hasil. Uji beberapa titik pada daerah hasil dan ajak peserta didik melihat bahwa semua titik pada daerah hasil memenuhi sistem pertidaksamaan linear tersebut.

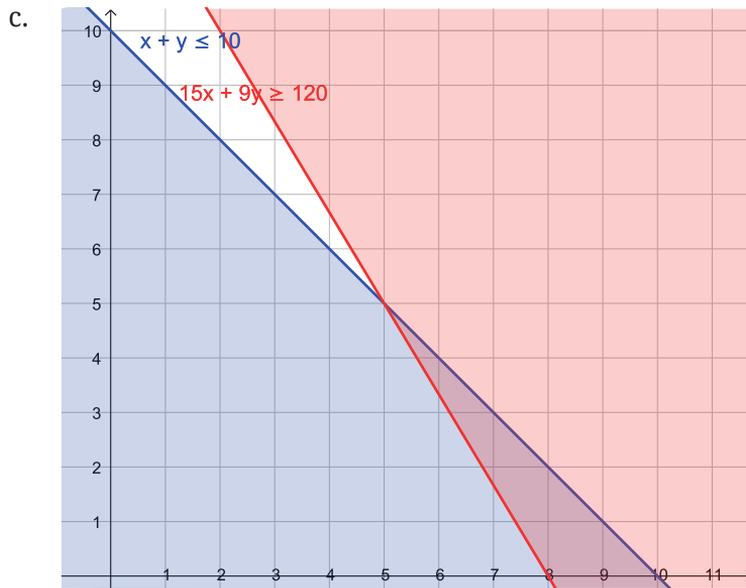
Beberapa contoh jawaban yang mungkin:

- (14,5) artinya 14 perlombaan dan 5 peserta
- (20,1) artinya 20 perlombaan dan 1 peserta

Kunci Jawaban Latihan 4.2

1. Jika x adalah lamanya Bonar bekerja mengantar barang dan y adalah lamanya Bonar bekerja mencuci piring, maka
 - a. Model matematikanya adalah

$$\begin{cases} x + y \leq 10 \\ 15x + 9y \geq 120 \end{cases}$$
 - b. Sistem pertidaksamaan linear. Semua variabelnya berpangkat 1.

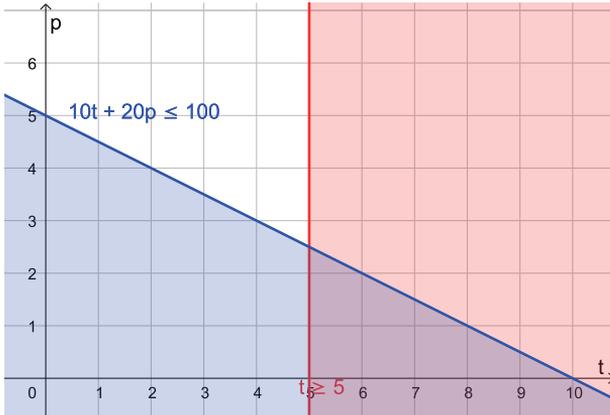


- d. Berpotongan di (5,5)
- e. Daerah yang berwarna ungu pada grafik
- f. Tidak. Tidak ada daerah dengan koordinat (4,y) pada daerah hasil (berwarna ungu).
- g. Dikehendaki titik (x,y) pada daerah hasil (ungu) yang memenuhi $x + y = 9$. Syarat ini terpenuhi di titik (7,2), (8,1) dan (9,0). Bonar bisa mendapatkan uang yang dibutuhkan dengan bekerja selama 9 jam. Ada tiga cara yang dapat dipilih:
- mengantar barang selama 7 jam dan mencuci piring selama 2 jam
 - mengantar barang selama 8 jam dan mencuci piring selama 1 jam
 - mengantar barang selama 9 jam

2. Jika t adalah banyaknya tanaman yang dibeli dan p adalah banyaknya pupuk yang dibeli, maka sistem pertidaksamaan linearnya adalah

$$\begin{cases} 10t + 20p \leq 100 \\ t \geq 5 \end{cases}$$

dan grafiknya ditunjukkan oleh

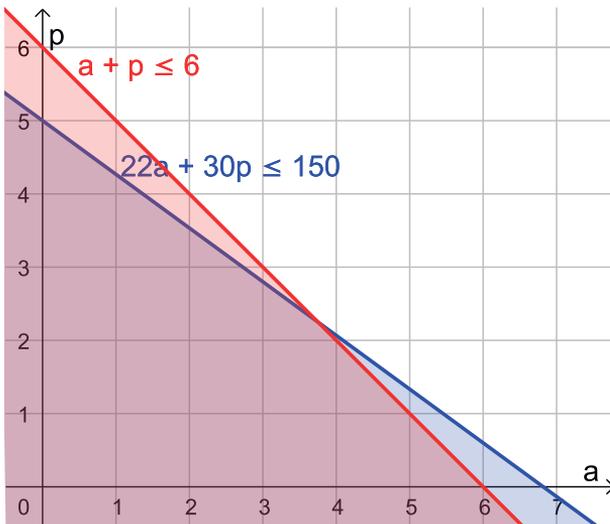


Ada beberapa kemungkinan yang dapat dipilih Nova, contohnya:

- (6,1) artinya 6 tanaman dan 1 kantong pupuk
 - (5,2) artinya 5 tanaman dan 2 kantong pupuk
3. Jika a adalah berat telur ayam dan p adalah berat telur puyuh yang dibeli, maka

$$\begin{cases} 22a + 30p \leq 150 \\ a + p \leq 6 \end{cases}$$

dan grafiknya ditunjukkan oleh

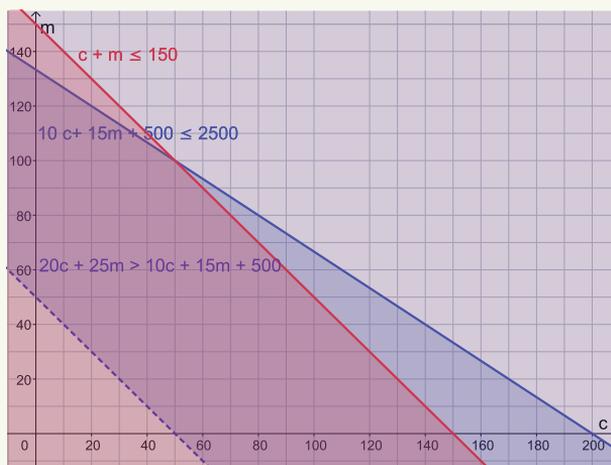


Ada beberapa kemungkinan yang dapat dipilih, contohnya:

- (1,3) artinya 1 kg telur ayam dan 3 kg telur puyuh
 - (4,2) artinya 4 kg telur ayam dan 2 kg telur puyuh
4. Jika c adalah banyaknya sabun cuci tangan dan m adalah banyaknya sabun mandi. Keuntungan didapatkan jika pendapatan lebih besar dari pengeluaran. Sistem pertidaksamaan linearnya:

$$\begin{cases} 10c + 15m + 500 \leq 2500 \\ c + m \leq 150 \\ 20c + 25m > 10c + 15m + 500 \end{cases}$$

dan grafiknya ditunjukkan oleh



UMKM tersebut bisa mendapat keuntungan, salah satunya jika membuat 80 liter sabun cuci tangan dan 40 liter sabun mandi.

Kunci Jawaban

Uji Kompetensi

1. Jika b menyatakan harga sebuah buku tulis, p menyatakan harga sebuah pena, dan s menyatakan harga sebuah penghapus, maka model matematikanya adalah sistem persamaan linear

| Toko A | Toko B |
|--|---|
| $\begin{cases} 8b + 4p + 3s = 62 \\ 5b + 8p = 57 \\ 3b + s = 17 \end{cases}$ | $\begin{cases} 5b + 4p + 2s = 48 \\ 8b + 12p = 90 \\ 5b + 8p + 3s = 64 \end{cases}$ |
| $b = 5, p = 4, s = 2$ | $b = 6, p = \frac{7}{2}, s = 2$ |
| Harga buku Rp5.000,00 Harga pena Rp4.000,00 Harga penghapus Rp2.000,00 | Harga buku Rp6.000,00 Harga pena Rp3.500,00 Harga penghapus Rp2.000,00 |

- Toko B
 - Harganya sama
 - Toko A
2. Jika a dan b adalah banyaknya uang yang didepositokan di Bank A dan Bank B secara berturut-turut, maka sistem pertidaksamaan linear yang dibentuk (dalam satuan juta rupiah) adalah

$$\begin{cases} a + b \leq 100 \\ 0,04a + 0,06b \geq 0,55 \end{cases}$$

dan grafiknya adalah



Ya, salah satu kemungkinannya adalah (1,9) yaitu mendepositokan Rp10.000.000,00 di Bank A dan Rp90.000.000,00 di Bank B.

3. Jika a menyatakan harga tiket anak, d menyatakan harga tiket dewasa, dan l harga tiket lansia (semuanya dalam ribu rupiah), maka sistem persamaannya menjadi:

$$\begin{cases} 4a + 2d + l = 640 \\ a + 3d + 2l = 550 \\ 3a + d + l = 450 \end{cases}$$

Sistem persamaan linear ini solusinya $a = 90, d = 100, l = 80$. Harga tiket anak-anak adalah Rp90.000,00, harga tiket dewasa adalah Rp100.000,00, dan harga tiket lansia adalah Rp80.000,00.

4. Jika j untuk menyatakan berat sebuah jeruk, m untuk menyatakan berat sebuah mangga, dan s untuk menyatakan berat sebuah salak maka masalah tersebut dapat dimodelkan ke dalam sistem persamaan linear berikut.

$$\begin{cases} m + 5j + 8s = 1,5 \\ 2m + 10j + 4s = 2 \\ 3m + 12s = 2 \end{cases}$$

yang solusinya adalah $j = \frac{1}{10}, m = \frac{1}{3}, s = \frac{1}{12}$

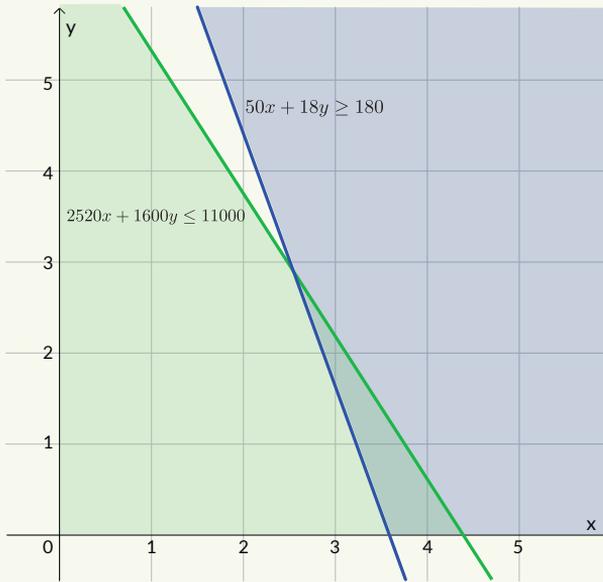
Solusi yang didapatkan perlu dikembalikan ke permasalahan nyata. Sesuai definisi setiap variabel, sebuah jeruk beratnya 0,1 kg, sebuah mangga beratnya $\frac{1}{3}$ kg, dan setiap salak beratnya $\frac{1}{12}$ kg.

5. Jika x adalah banyaknya bus besar dan y adalah banyaknya bus kecil, maka masalah ini dapat dimodelkan dengan sistem pertidaksamaan linear:

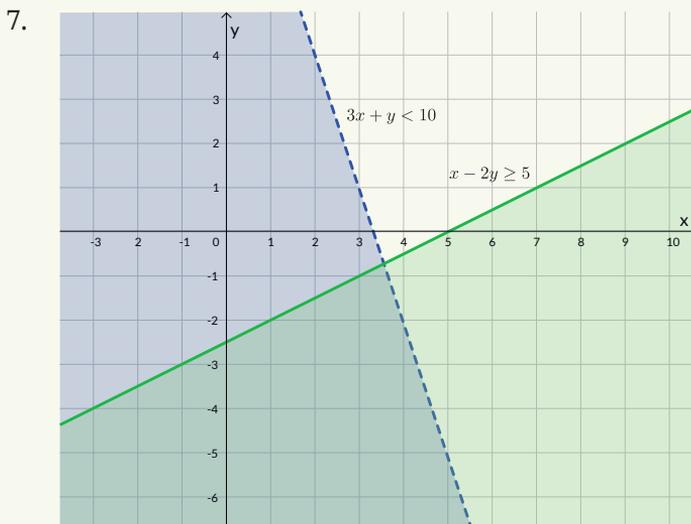
$$\begin{cases} 50x + 18y \geq 180 \\ 2520x + 1600y \leq 11000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Perlu diingat bahwa x dan y haruslah berupa bilangan bulat non-negatif. Sehingga solusinya adalah (3,2) atau (4,0), artinya ada dua pilihan:

- menyewa tiga bus besar dan dua bus kecil; atau
- menyewa empat bus besar



6. Dapat diselesaikan dengan metode eliminasi dan substitusi. Hasil yang didapatkan: $x = \frac{180}{29}$, $y = \frac{360}{29}$, dan $z = \frac{380}{29}$



Pengayaan

Penjelasan bagian Pengayaan dapat diakses melalui tautan berikut.

<https://buku.kemdikbud.go.id/s/ds9tv2>



Refleksi

Ajak peserta didik untuk melakukan refleksi. Jika ada peserta didik yang mengalami kesulitan pada bagian tertentu, mereka dapat mendapatkan penguatan.

Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Republik Indonesia, 2023

**Panduan Guru Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas X
(Edisi Revisi)**

Penulis: Dicky Susanto, dkk.
ISBN: 978-623-118-562-4

Bab

5

Panduan Khusus

Persamaan dan Fungsi Kuadrat



Bagaimana menggunakan persamaan dan fungsi kuadrat untuk menyelesaikan masalah dalam kehidupan sehari-hari?

Pendahuluan

Setelah mempelajari bab ini peserta didik diharapkan dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan persamaan kuadrat dalam kehidupan sehari-hari dan menggunakan fungsi kuadrat untuk menyelesaikan masalah dalam kehidupan sehari-hari.

Guna memastikan tercapainya tujuan pembelajaran maka dapat digunakan beberapa kriteria seperti yang diberikan di bawah ini.

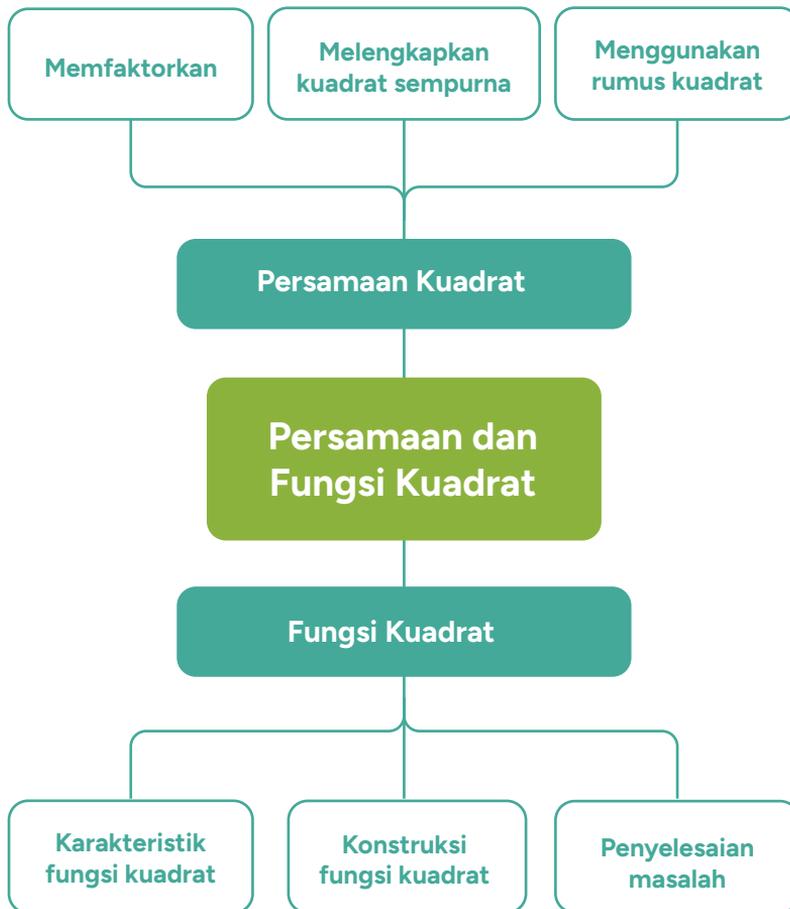
- Peserta didik mampu mengidentifikasi ciri-ciri sebuah persamaan kuadrat
- Peserta didik mampu merumuskan masalah sehari-hari dalam bentuk persamaan kuadrat
- Peserta didik mampu menyelesaikan persamaan kuadrat dengan menggunakan faktorisasi
- Peserta didik mampu menyelesaikan persamaan kuadrat dengan melengkapi kuadrat sempurna
- Peserta didik mampu menyelesaikan persamaan kuadrat dengan menggunakan rumus persamaan kuadrat
- Peserta didik mampu mengidentifikasi jenis solusi persamaan kuadrat berdasarkan nilai diskriminan
- Peserta didik mampu menjelaskan karakteristik fungsi kuadrat terbuka ke atas atau ke bawah, mempunyai titik potong dengan sumbu $-x$ atau tidak, mempunyai titik maksimum atau titik minimum
- Peserta didik mampu menyelesaikan soal-soal fungsi kuadrat yang berkaitan dengan titik maksimum atau titik minimum dan titik potong dengan sumbu $-x$
- Peserta didik mampu mengkonstruksi fungsi kuadrat berdasarkan informasi yang ada

Pokok materi yang akan dipelajari dalam bab ini adalah persamaan kuadrat dan fungsi kuadrat. Pembelajaran persamaan kuadrat dan fungsi kuadrat bertujuan untuk mengembangkan kemampuan analisis peserta didik dalam menyelesaikan masalah termasuk menggunakan informasi yang relevan dalam konstruksi fungsi. Fokus dari pembelajaran adalah

bagaimana memahami konsep dan prinsip dari persamaan kuadrat dan fungsi kuadrat sehingga dapat diterapkan dalam berbagai situasi.

Persamaan kuadrat dan fungsi kuadrat berguna dalam pembuatan model sebuah situasi ekonomi, ukuran tanah pertanian, dan penentuan waktu jatuh benda. Pembelajaran bab ini juga terkait dengan mata pelajaran Fisika, khususnya topik gerak lurus berubah beraturan.

Peta Materi



Bab ini disarankan untuk diselesaikan dalam pertemuan sebanyak 15 JP, namun guru dapat menyesuaikan dengan kondisi satuan pendidikan setempat dengan memperhitungkan keragaman kondisi, potensi, kemampuan individu peserta didik, dan dinamika kelas.

Konsep dan Keterampilan Prasyarat

Pengetahuan awal yang diperlukan untuk mempelajari persamaan kuadrat dan fungsi kuadrat adalah pemahaman fungsi, sifat distributif, dan faktorisasi. Pastikan juga peserta didik memahami bentuk kuadrat.

Penyajian Materi Esensial

Pada subbab A peserta didik melakukan beberapa kegiatan eksplorasi untuk mempelajari persamaan kuadrat. Eksplorasi awal merupakan perumusan masalah dalam bentuk persamaan kuadrat untuk memperkuat pemahaman bentuk persamaan kuadrat. Tiga kegiatan eksplorasi untuk menyelesaikan persamaan kuadrat adalah penggunaan ubin aljabar untuk melakukan faktorisasi, melengkapi kuadrat sempurna, dan menggunakan rumus persamaan kuadrat. Kegiatan eksplorasi terakhir dalam subbab A adalah mengungkapkan adanya akar yang imajiner.

Pada subbab B peserta didik melakukan beberapa kegiatan eksplorasi untuk mempelajari fungsi kuadrat. Eksplorasi awal berupa analisis karakteristik fungsi kuadrat. Eksplorasi selanjutnya adalah konstruksi fungsi kuadrat jika diberikan sejumlah informasi. Eksplorasi akhir adalah penggunaan fungsi kuadrat untuk menyelesaikan beberapa jenis masalah.

Apersepsi

Perkenalkan bab ini dengan menunjukkan situasi yang berkaitan dengan bentuk kuadrat seperti luas persegi. Tanyakan kepada peserta didik apa yang ada dalam benak mereka saat mendengar Persamaan Kuadrat dan Fungsi Kuadrat, minta mereka menghubungkannya dengan persamaan matematika dan fungsi. Tunjukkan bahwa persamaan kuadrat dan fungsi kuadrat digunakan dalam kehidupan sehari-hari. Contoh sederhana dari penerapan persamaan kuadrat adalah menentukan sisi sebuah persegi jika diketahui luasnya, berikan contoh-contoh yang lain. Tampung semua jawaban yang muncul dan arahkan mereka untuk memahami esensi topik dari bab 5.

Penilaian Sebelum Pembelajaran

Gunakan bagian **Ayo, Mengingat Kembali** mengenai pemahaman fungsi, faktorisasi, dan sifat distributif yang sudah dipelajari di SMP. Contoh pertanyaan yang dapat digunakan untuk mengaktifkan prapengetahuan peserta didik.

1. Lima baju serupa berharga Rp420.000,00. Berapa harga tujuh baju? Jika uang kamu sebesar Rp1.008.000,00, berapa baju yang kamu peroleh?
2. Jabarkan $4(2x - 6)$.
3. Faktorkan $14x + 36$.

Peserta didik dapat diberikan pertanyaan-pertanyaan lain untuk menggali pemahaman prapengetahuan seperti menentukan nilai fungsi jika diketahui nilai variabel tertentu.

Panduan Pembelajaran

A. Persamaan Kuadrat



Kriteria Ketercapaian Tujuan Pembelajaran

- Peserta didik mampu mengidentifikasi ciri-ciri sebuah persamaan kuadrat
- Peserta didik mampu merumuskan masalah sehari-hari dalam bentuk persamaan kuadrat
- Peserta didik mampu menyelesaikan persamaan kuadrat dengan menggunakan faktorisasi
- Peserta didik mampu menyelesaikan persamaan kuadrat dengan melengkapi kuadrat sempurna
- Peserta didik mampu menyelesaikan persamaan kuadrat dengan menggunakan rumus persamaan kuadrat
- Peserta didik mampu mengidentifikasi jenis solusi persamaan kuadrat berdasarkan nilai diskriminan



Sarana & Prasarana Pembelajaran

- Kertas origami dengan tiga warna berbeda yang akan digunakan sebagai ubin aljabar
- Aplikasi untuk menyelesaikan masalah persamaan kuadrat.



Apersepsi

Ingatkan kembali tentang persamaan dan fungsi linear serta tanyakan contoh aplikasi persamaan dan fungsi linear dalam kehidupan sehari-hari. Sampaikan bahwa mereka akan belajar persamaan dan fungsi kuadrat yaitu persamaan dan fungsi dengan pangkat tertinggi adalah pangkat dua. Tuliskan beberapa contohnya.

Ingatkan peserta didik tentang penggunaan faktorisasi dan sifat distributif untuk menyelesaikan soal-soal. Berikan soal-soal yang berkaitan dengan faktorisasi dan sifat distributif.

Gunakan bagian **Ayo, Mengingat Kembali** mengenai persamaan dan fungsi linear yang sudah dipelajari di SMP. Pertanyaan-pertanyaan berikut dapat digunakan untuk mengaktifkan prapengetahuan peserta didik:

1. Harga 1 buah pepaya adalah Rp9.500,00.
 - a. Buatlah fungsi yang menyatakan hubungan antara jumlah pepaya dengan harga yang harus dibayar.
 - b. Jika harga yang dibayar adalah Rp104.500,00 berapa jumlah pepaya yang harus diperoleh?
2. Biaya perjalanan taksi sejauh 100 m adalah Rp700,00 dan biaya awal adalah Rp5.000,00
 - a. Buatlah fungsi yang menyatakan hubungan antara harga yang harus dibayar dengan jarak tempuh.
 - b. Jika harga yang dibayar adalah Rp75.000,00 berapa jarak tempuh taksi tersebut?
3. Faktorkan $18x + 12$ dengan menggunakan sifat distributif.



Pemanasan

Capaian Pembelajaran Matematika dari fase D menyatakan ‘Mereka dapat menggunakan sifat-sifat operasi (komutatif, asosiatif, dan distributif) untuk menghasilkan bentuk aljabar yang ekuivalen.’

Sifat-sifat operasi tersebut diperlukan dalam penyelesaian persamaan dan fungsi kuadrat.

Bab Persamaan dan Fungsi Kuadrat ini dituliskan dengan memastikan peserta didik dapat mengenal bentuk-bentuk

- $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
- $(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$
- $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

serta bentuk-bentuk lain yang setara.

Asesmen awal untuk mengetahui penguasaan peserta didik tentang materi tersebut sangat disarankan.

Eksplorasi

5.1

Perumusan Masalah dalam Bentuk Persamaan Kuadrat



Ayo, Bereksplorasi

Eksplorasi 5.1 sebaiknya dilakukan secara berpasangan. Arahkan peserta didik untuk membaca setiap masalah secara teliti. Eksplorasi ini melatih peserta didik untuk merumuskan masalah sehari-sehari dalam pernyataan matematika.

1. Luas ruang kelas adalah $4 \times 6 = 24 \text{ m}^2$ dan luas keempat sudut adalah $4x^2$. Luas ruang kelas yang tersisa adalah $24 - 4x^2$.
2. Misalkan kedua bilangan adalah p dan q maka perkalian kedua bilangan adalah pq . Penjumlahan adalah $p + q = 16$ sehingga $q = 16 - p$.
Perkalian kedua bilangan adalah $pq = p(16 - p) = 63$.
Persamaan $16p - p^2 = 63$ dapat ditulis menjadi $p^2 - 16p + 63 = 0$.
3. Kelajuan = $\frac{\text{jarak}}{\text{waktu}}$ sehingga $v = \frac{320}{t}$ dan $(v + 24) = \frac{320}{t-3}$ = Diperoleh
 $\frac{320}{t} + 24 = \frac{320}{t-3}$.

Kalikan persamaan di atas dengan $t(t - 3)$.

$$320(t - 3) + 24t(t - 3) = 320t$$

$$-960 + 24t^2 - 72t = 0$$

$$24t^2 - 72t - 960 = 0$$

$$t^2 - 3t - 40 = 0$$



Ayo, Berpikir Kritis

1. Jika setiap ruas dikalikan dengan x maka diperoleh $1 + 2x^2 + 4x = 0$ sehingga persamaan ini merupakan persamaan kuadrat.
2. Jika setiap ruas dikalikan dengan $(x - 5)(x - 3)$ maka diperoleh $(x - 5) + (x - 3) = (x - 5)(x - 3)(x^2 - 4)$ sehingga persamaan ini bukan merupakan persamaan kuadrat.



Ayo, Berdiskusi

Diskusikan contoh-contoh soal yang dibuat oleh peserta didik.



Miskonsepsi

Peserta didik menentukan operasi penjumlahan $x + 3$ sebagai $3x$. Berikan contoh untuk memastikan pemahaman penggunaan operasi matematika yang sebenarnya. Contoh, panjang ruangan tidak diketahui disebut x dengan satuan m. Jika panjang ruangan menjadi tiga kali maka berapa jadinya panjang ruangan? Jika ditambah 3m berapa jadinya panjang ruangan? Peserta didik menamakan suatu persamaan sebagai persamaan kuadrat karena hanya melihat pangkat tertinggi dari variabel x adalah 2. Ingatkan bahwa persamaan kuadrat merupakan suatu polinom.



Metode & Aktivitas Pembelajaran

Hubungkan eksplorasi dengan penjelasan bagaimana menyatakan masalah dalam persamaan matematika. Pastikan peserta didik membedakan variabel dan bilangan. Berikan contoh soal cerita yang membedakan perkalian dan penjumlahan.

Peserta didik diberikan kesempatan untuk membagikan soal-soal yang mereka buat sendiri (perhatikan fitur **Ayo, Berdiskusi**). Contoh lainnya adalah menentukan pendapatan dari penjualan sejumlah barang yang mana harga produksi barang ditentukan oleh jumlah barang yang diproduksi. Buatlah diskusi tentang soal-soal tersebut. Diskusikan kesulitan dan kendala yang dialami oleh peserta didik.

Berikan pertanyaan-pertanyaan sejenis seperti yang ditunjukkan dalam **Eksplorasi 5.1** dengan tujuan peserta didik dapat melihat masalah-masalah yang dinyatakan dalam persamaan kuadrat.

Ajukan pertanyaan, bagaimana menyelesaikan pertanyaan ini, untuk memancing minat dan perhatian peserta didik.

Berikan juga contoh-contoh soal untuk menentukan apakah persamaan tersebut merupakan persamaan kuadrat atau bukan.

Kunci Jawaban Latihan 5.1

1. Persamaan matematika yang merupakan persamaan kuadrat adalah b dan c .
2. a. $x^2 + 5x + 6 = 0$
b. $\frac{1}{3}x^2 - x - 36 = 0$
c. $2x^2 + 2x - 40 = 0$
3. $(x + a)(x - b) = x^2 - bx + ax - ab$
4. a. Luas bangun datar $= x^2 + 8x = 20$
b. Setiap sudut mendapatkan tambahan luas $2 \times 2 = 4 \text{ m}^2$
Tambahan luas total sebesar 16 m^2
Persamaan kuadrat untuk persegi adalah $(x + 4)^2 = 36$
5. Luas bangun datar $x^2 + bx = 150$



Diferensiasi

Kembangkan soal-soal seperti dalam **Latihan 5.1** bagi peserta didik yang kecepatan belajarnya tinggi (*advanced*) dan minta mereka mengerjakan latihan tanpa bantuan. Guru juga memberikan soal-soal dan mendampingi peserta didik yang mengalami kesulitan.

1. Menyelesaikan Persamaan Kuadrat dengan Faktorisasi

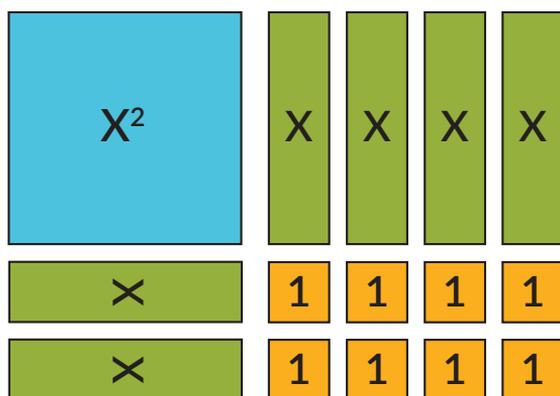
Eksplorasi 5.2 Menyelesaikan Persamaan Kuadrat dengan Ubin Aljabar (Faktorisasi)



Ayo, Bereksplorasi

Eksplorasi 5.2 dapat dilakukan secara berpasangan atau dalam kelompok dengan jumlah anggota kelompok maksimal 4 orang. Pastikan setiap kelompok sudah memiliki alat peraga, penentuan warna kertas origami sesuai dengan bentuknya dapat bebas. Arahkan peserta didik untuk memperhatikan penjelasan dengan saksama. Eksplorasi ini melatih peserta didik untuk menyelesaikan soal-soal persamaan kuadrat dengan cara faktorisasi.

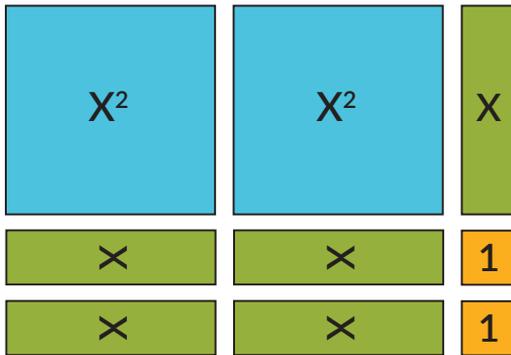
Penyelesaian $x^2 + 6x + 8 = 0$ dengan menggunakan ubin aljabar.



$$x^2 + 6x + 8 = (x + 2)(x + 4) = 0$$

Akar-akar dari persamaan kuadrat adalah $x = -2$ dan $x = -4$.

Penyelesaian $2x^2 + 5x + 2 = 0$ dengan menggunakan ubin aljabar.



$$2x^2 + 5x + 2 = (2x + 1)(x + 2) - 0$$

Akar-akar dari persamaan kuadrat adalah $x = -\frac{1}{2}$ dan $x = -2$.



Miskonsepsi

Peserta didik, pada umumnya, selalu menyelesaikan akar dari $\sqrt{9}$ adalah 3 sehingga persamaan kuadrat seperti $x^2 = 9$ hanya memberikan akar persamaan kuadrat yang bernilai positif saja.



Metode & Aktivitas Pembelajaran

Temukan kendala-kendala yang dialami oleh peserta didik dalam menggunakan ubin aljabar. Diskusikan manfaat ubin aljabar dalam menyelesaikan persamaan kuadrat dan tanyakan peran koefisien persamaan kuadrat dalam menentukan faktorisasi. Pastikan peserta didik dapat menentukan faktorisasi dengan tepat dan cepat dalam menyelesaikan persamaan kuadrat.

Berikan soal-soal lainnya yang diselesaikan dengan menggunakan ubin aljabar jika peserta didik belum paham penentuan faktorisasi. Pastikan peserta didik memahami bahwa +6 dapat merupakan hasil perkalian +3 dan +2 atau -3 dan -2. Pastikan juga peserta didik memahami bahwa -6 merupakan perkalian -3 dan +2 atau +3 dan -2. Contoh-contoh diberikan sebagai berikut.

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2) = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2) = 0$$

$$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2) = 0$$

$$x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2) = 0$$

Jawaban Latihan 5.2

Sebagai langkah awal peserta didik dapat menggunakan diagram bentuk kuadrat (lihat **Gambar 5.6** pada **Buku Siswa**) untuk memperkuat pemahaman faktorisasi.

1. $2(6)^2 - b(6) - 6 = 0$

$$72 - 6b - 6 = 0 \text{ sehingga } 66 = 6b, \text{ maka } b = 11.$$

$$2x^2 - 11x - 6 = 0$$

$$2x^2 - 11x - 6 = (x - 6)(2x + 1) = 0$$

$$\text{Akar lainnya } x = -\frac{1}{2}$$

2. $a(6)^2 - 17(6) - 6 = 0$

$$36a - 102 - 6 = 0$$

$$36a = 108$$

$$a = 3$$

$$3x^2 - 17x - 6 = 0$$

$$(3x + 1)(x - 6) = 0$$

$$(3x + 1) = 0 \quad \text{atau} \quad (x - 6) = 0$$

$$x = -\frac{1}{3} \quad \quad \quad x = 6$$

Maka akar yang lain adalah $-\frac{1}{3}$.

3. $72 + 18 + c = 0$ sehingga $c = -90$

$$2x^2 - 3x - 90 = 0$$

$$(x + 6)(2x - 15) = 0$$

$$\text{Jadi } x = -6 \text{ atau } x = \frac{15}{2}$$

4. $2x^2 - 8x + 6 = 0$ disederhanakan menjadi $x^2 - 4x + 3 = 0$

$$(x - 1)(x - 3) = 0 \text{ sehingga } x = 1 \text{ atau } x = 3$$

$$5. \quad 2x^2 - 18 = 0$$

$$x^2 - 9 = 0$$

$$(x + 3)(x - 3) = 0$$

$$(x + 3) = 0$$

atau

$$(x - 3) = 0$$

$$x = -3$$

$$x = 3$$

$$6. \quad 2x^2 - 5x - 18 = 0$$

$$(2x - 9)(x + 2) = 0 \quad \text{sehingga } x = \frac{9}{2} \text{ atau } x = -2$$

$$7. \quad (2x + 1)(x - 3) = 0$$

$$2x^2 - 5x - 3 = 0$$

Koefisien $b = -5$ dan koefisien $c = -3$

$$8. \quad (3x - 2)(x + 4) = 0$$

$$3x^2 + 10x - 8 = 0$$

Koefisien $a = 3$ dan koefisien $b = 10$

9. Bilangan tersebut dinyatakan sebagai \overline{xy} dengan x bernilai puluhan dan y bernilai satuan, sehingga $\overline{xy} = 10x + y$

$$\text{Perkalian } xy = 12 \text{ sehingga } y = \frac{12}{x}$$

Jika bilangan \overline{yx} maka y bernilai puluhan dan x bernilai satuan.

$$10x + y - (10y + x) = 9$$

$$9x - 9y = 9 \text{ atau } x - y = 1$$

$$x - \frac{12}{x} = 1$$

$$x^2 - x - 12 = 0$$

$$(x - 4)(x + 3) = 0$$

Jadi $x = 4$ atau $x = -3$, yang diambil adalah $x = 4$.

Karena $xy = 12$ maka $x = 4$ sehingga $y = 3$. Bilangan tersebut adalah 43.

10. Waktu oleh pipa A dan pipa B adalah 24 menit.

Laju pengisian pipa A adalah $\frac{1}{t}$

Laju pengisian pipa B adalah $\frac{1}{t+36}$

Laju pengisian oleh pipa A dan pipa B adalah $\frac{1}{24}$

Persamaan yang dibentuk adalah

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{t+36} = \frac{1}{24}$$

Kalikan tiap ruas dengan $24t(t + 36)$.

$$24(t + t + 36) = t(t + 36)$$

$$48t + 864 = t^2 + 36t$$

$$t^2 - 12t - 864 = 0$$

$$(t - 36)(t + 24) = 0$$

Solusi $t = 36$ detik karena waktu harus bernilai positif.

Waktu pengisian oleh pipa A adalah 36 detik, sedangkan waktu pengisian oleh pipa B adalah 72 detik.



Diferensiasi

Kembangkan soal-soal seperti dalam **Latihan 5.2** bagi peserta didik yang kecepatan belajarnya tinggi (*advanced*) dan minta mereka mengerjakan latihan tanpa bantuan. Guru juga memberikan soal-soal bagi peserta didik yang mengalami kesulitan dan mendampingi mereka.

Guru memberikan penguatan bagi peserta didik yang membutuhkan bimbingan terkait materi ini. Salah satu hal yang dapat dilakukan adalah dengan mengingatkan peserta didik bahwa perkalian dua bilangan dapat didekati dengan pemahaman luas. Contohnya, perkalian 274×46 dapat dipandang sebagai:

| | | |
|-----|------|------|
| | 40 | 6 |
| 200 | 8000 | 1200 |
| 70 | 2800 | 420 |
| 4 | 160 | 24 |

Hasilnya:

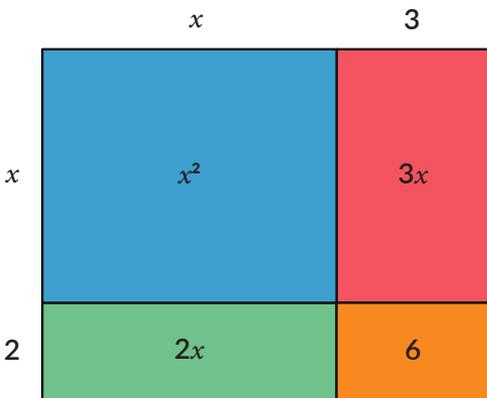
$$274 \times 46 = 8000 + 2800 + 160 + 1200 + 420 + 24 = 12.604$$

Perhatikan perkalian bersusun dari 274×46 .

$$\frac{274}{\frac{46}{1644} \times} + \frac{10960}{12604}$$

Jika dikaitkan dengan perkalian bersusun maka 1644 dan 10960 adalah hasil penjumlahan daerah yang dipisahkan oleh garis tebal.

Demikian pula bentuk $(x + 3)(x + 2)$ dapat dipandang sebagai:



sehingga $(x + 3)(x + 2) = x^2 + 5x + 6$

Peserta didik yang masih membutuhkan bimbingan, dapat mengikuti pembelajaran dengan menyiapkan tabel daftar identitas aljabar sebagai referensi saat mengerjakan soal.

Cara pendekatan luas menolong peserta didik untuk melakukan faktorisasi.

2. Melengkapi Kuadrat Sempurna

Eksplorasi

5.3

Menyelesaikan Persamaan Kuadrat dengan Melengkapi Kuadrat Sempurna



Ayo, Bereksplorasi

Eksplorasi 5.3 dapat dilakukan secara berpasangan atau mandiri. Arahkan peserta didik untuk memperhatikan pertanyaan-pertanyaan dengan saksama. Eksplorasi ini melatih peserta didik untuk menyelesaikan soal-soal persamaan

kuadrat dengan cara melengkapi kuadrat sempurna dengan terlebih dahulu memahami soal seperti apa yang memerlukan cara seperti ini.

Persamaan kuadrat $x^2 + 4x + 2 = 0$ tidak bisa diselesaikan dengan menggunakan ubin aljabar karena faktorisasi 2 adalah 2×1 dan penjumlahan $2 + 1 = 3$.

1. Diagram bentuk kuadrat

| | | |
|----|----------------|----|
| | X | +2 |
| X | X ² | 2x |
| +2 | 2x | 4 |

2. Hubungan antara $(x + 2)^2$ dengan $x^2 + 4x + 2$.

$$x^2 + 4x + 2 = (x + 2)^2 - 2$$

$$x^2 + 4x + 2 = 0$$

$$(x + 2)^2 - 2 = 0$$

$$(x + 2)^2 = 2$$

3. $x + 2 = \pm\sqrt{2}$

$$x = -2 \pm \sqrt{2}$$

4. Diagram bentuk kuadrat

| | | |
|----|----------------|----|
| | X | +5 |
| X | X ² | 5x |
| +5 | 5x | 25 |

Hubungan antara bentuk $(x + 5)^2$ dengan $x^2 + 10x + 6 = 0$

$$(x + 5)^2 - 19 = x^2 + 10x + 6 = 0$$

$$(x + 5)^2 - 19 = 0$$

$$(x + 5) = \pm\sqrt{19}$$

$$x = -5 \pm \sqrt{19}$$

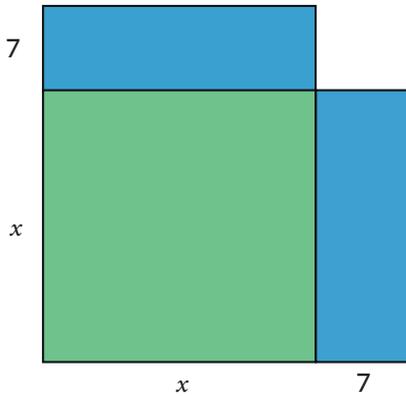
5. Kunci penyelesaian adalah membuat persamaan kuadrat dalam bentuk $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$



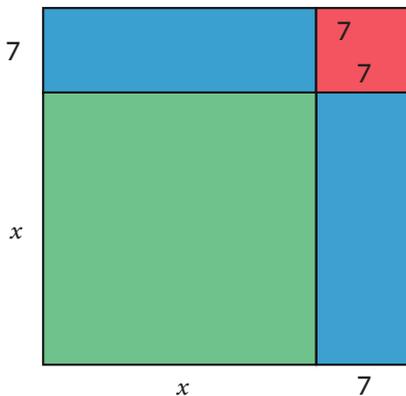
Ayo, Berpikir Kreatif

Suatu persamaan kuadrat berbentuk $x^2 + 14x = 32$

1. Luas bangun datar untuk menggambarkan $x^2 + 14x$



2. Bangun datar berbentuk persegi yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan kuadrat dengan cara melengkapi kuadrat sempurna.



Luas persegi adalah gabungan dari luas bangun datar awal dengan luas persegi tambahan (merah). Perhatikan bahwa luas bangun datar adalah 32 sedangkan luas persegi merah adalah 49.

$$\begin{aligned} \text{Luas persegi} &= \text{luas bangun datar awal} + \text{luas persegi merah} \\ &= 32 + 49 \\ &= 81 \end{aligned}$$

$$\text{Luas persegi} = (x + 7)(x + 7) = 81$$

Jadi $x + 7 = 9$ sehingga $x = 2$.

Jika $x + 7 = -9$ maka $x = -16$.

Perhatikan bahwa $x = -16$ tidak bisa digunakan sebagai sisi persegi.

Penggunaan luas persegi besar untuk menggambarkan proses.



Miskonsepsi

Kesalahan yang sering dilakukan oleh peserta didik:

- Peserta didik tidak membuat koefisien a dalam persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ untuk $a \neq |1|$.
- Peserta didik tidak mengurangi persamaan kuadrat dengan kuadrat dari $\frac{b}{2}$.



Metode & Aktivitas Pembelajaran

Arahkan peserta didik untuk memahami cara penyelesaian persamaan kuadrat dengan melengkapi kuadrat sempurna dengan mengingatkan bahwa $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Diharapkan peserta didik dapat memahami bahwa untuk menyelesaikan persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ dengan cara melengkapi kuadrat sempurna maka koefisien b perlu dibagi dengan $2a$.

Arahkan peserta didik untuk menganalisis penyelesaian persamaan kuadrat dengan cara melengkapi kuadrat sempurna dengan membuat luas persegi sebagaimana yang ditunjukkan oleh **Ayo, Berpikir Kreatif**. Berikan contoh-contoh soal lainnya.

Tunjukkan bahwa bentuk $(x + p)^2 = q$ merupakan bentuk akhir yang akan digunakan dalam penyelesaian persamaan kuadrat.

Kunci Jawaban Latihan 5.3

1. $x^2 + 5x + 6 = 0$

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + 6 - \frac{25}{4} = 0$$

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\left(x + \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$x = -2$$

atau $\left(x + \frac{5}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

$$x = -3$$

2. $2x^2 + 6x + 3 = 0$

$$x^2 + 3x + \frac{3}{2} = 0$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} - \frac{9}{4} = 0$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$x = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} \quad \text{atau} \quad x = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

3. $6x^2 + 2x + \frac{1}{6} = 0$

$$x^2 + \frac{x}{3} + \frac{1}{36} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{36} - \frac{1}{36} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 = 0$$

$$x = -\frac{1}{6}$$

4. $x^2 - 12x - 15 = 0$

$$(x - 6)^2 - 51 = 0$$

$$(x - 6) = \pm\sqrt{51}$$

$$x = 6 \pm \sqrt{51}$$

5. Untuk mendapatkan koefisien x^2 bernilai 1, kedua ruas dikalikan $\frac{2}{3}$ dengan sehingga diperoleh

$$x^2 - \frac{16}{3}x - \frac{12}{3} = 0$$

$$\left(x - \frac{8}{3}\right)^2 - \frac{100}{9} = 0$$

$$\left(x - \frac{8}{3}\right)^2 = \left(\frac{10}{3}\right)^2$$

$$x - \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$$

$$x = \frac{8}{3} + \frac{10}{3}$$

$$x = 6$$

atau

$$x - \frac{8}{3} = -\frac{10}{3}$$

$$x = \frac{8}{3} - \frac{10}{3}$$

$$x = -\frac{2}{3}$$



Diferensiasi

Kembangkan soal-soal seperti dalam **Latihan 5.3** bagi peserta didik yang kecepatan belajarnya tinggi (*advanced*) dan minta mereka mengerjakan latihan tanpa bantuan. Guru juga memberikan soal-soal dan mendampingi peserta didik yang mengalami kesulitan. Gunakan diagram bentuk kuadrat untuk memperkuat pemahaman bagi mereka yang mengalami kesulitan dan tunjukkan $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

3. Menggunakan Rumus Persamaan Kuadrat

Eksplorasi

5.4

Membuktikan Rumus Mencari Akar-Akar dari Persamaan Kuadrat



Ayo, Bereksplorasi

Eksplorasi 5.4 dapat dilakukan secara berpasangan atau mandiri. Berikan petunjuk agar peserta didik menggunakan persamaan kuadrat untuk menurunkan rumus persamaan kuadrat.

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c &= 0 \\
 a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c &= 0 \\
 a \left(x^2 + 2 \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) - \frac{b^2}{4a} + c &= 0 \\
 a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 &= \frac{b^2}{4a} - \frac{4ac}{4a} \\
 \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
 x + \frac{b}{2a} &= \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
 \end{aligned}$$

$$x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{atau} \quad x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



Ayo, Berpikir Kritis

1. $x_1 + x_2 = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$
2. $x_1x_2 = \frac{c}{a}$



Miskonsepsi

Perhatikan operasi pengurangan yang melibatkan bilangan negatif.



Metode & Aktivitas Pembelajaran

Perhatikan apakah peserta didik dapat mengubah persamaan kuadrat standar dalam bentuk yang dapat diselesaikan dengan cara melengkapi kuadrat sempurna.

Tunjukkan bahwa dengan pemahaman penjumlahan dan perkalian kedua akar persamaan kuadrat maka dapat dibuat persamaan kuadrat yang

baru dengan akar-akar yang berkaitan dengan akar-akar persamaan kuadrat yang lama/sebelumnya. Lihat **Ayo, Berpikir Kritis** sebelumnya tentang penjumlahan dan perkalian kedua akar.

Kunci Jawaban Latihan 5.4

1. Solusi persamaan kuadrat $x^2 + 5x + 6 = 0$ adalah

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-5 \pm 1}{2} \end{aligned}$$

yaitu $x_1 = -2$ atau $x_2 = -3$.

2. Solusi persamaan kuadrat $2x^2 + 6x + 3 = 0$ adalah

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} \\ &= \frac{-6 \pm \sqrt{12}}{4} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

yaitu $x_1 = \frac{-3 + \sqrt{3}}{2}$ atau $x_2 = \frac{-3 - \sqrt{3}}{2}$.

3. Solusi persamaan kuadrat $6x^2 + 2x + \frac{1}{6} = 0$ adalah

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{6}}}{2 \cdot 6} \\ &= \frac{-2 \pm 0}{12} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

yaitu $x_1 = x_2 = \frac{1}{6}$

4. Solusi persamaan kuadrat $\frac{1}{2}x^2 + 4x + 6 = 0$ adalah

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6}}{2 \cdot \frac{1}{2}} \\ &= -4 \pm 2 \end{aligned}$$

yaitu $x_1 = -2$ atau $x_2 = -6$

5. Solusi persamaan $\frac{2}{3}x^2 + 2x - 12 = 0$ kuadrat adalah

$$\begin{aligned}x_{1,2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot (-12)}}{2 \cdot \frac{2}{3}} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{\frac{4}{3}} \\ &= \frac{3}{4}(-2 \pm 6)\end{aligned}$$

yaitu $x_1 = 3$ dan $x_2 = -6$



Diferensiasi

Kembangkan soal-soal seperti dalam **Latihan 5.4** bagi peserta didik yang kecepatan belajarnya tinggi (*advanced*) dan minta mereka mengerjakan latihan tanpa bantuan. Guru juga memberikan soal-soal dan mendampingi peserta didik yang mengalami kesulitan. Gunakan bentuk diagram untuk memperkuat pemahaman peserta didik yang belum dapat menyelesaikan soal-soal dengan tuntas.

4. Jenis-Jenis Akar Persamaan Kuadrat

Eksplorasi 5.5 Akar-Akar Tidak Nyata atau Imajiner



Ayo, Bereksplorasi

Penyelesaian $x^2 + 4x + 8 = 0$ dengan menggunakan rumus persamaan kuadrat akan menghasilkan akar diskriminan yang bernilai negatif.



Ayo, Berdiskusi

Kendala dalam penyelesaian persamaan kuadrat ini adalah diskriminan bernilai negatif.



Miskonsepsi

Peserta didik berpikir bahwa persamaan kuadrat hanya memiliki akar-akar yang real.



Metode & Aktivitas Pembelajaran

Jelaskan bahwa akar dari bilangan negatif digunakan dalam kehidupan sehari-hari seperti dalam arus listrik bolak-balik. Diskusikan tentang peran diskriminan dalam penentuan jenis-jenis solusi persamaan kuadrat.

Kunci Jawaban Latihan 5.5

1. Diskriminan bernilai nol sehingga persamaan kuadrat menghasilkan akar kembar yang real.
2. Diskriminan bernilai kurang dari nol sehingga persamaan kuadrat menghasilkan dua akar imajiner berbeda.
3. Diskriminan bernilai lebih dari nol sehingga persamaan kuadrat menghasilkan dua akar real berbeda.
4. Diskriminan bernilai lebih dari nol sehingga persamaan kuadrat menghasilkan dua akar real berbeda.
5. Diskriminan bernilai lebih dari nol sehingga persamaan kuadrat menghasilkan dua akar real berbeda.



Diferensiasi

Kembangkan soal-soal seperti dalam **Latihan 5.5** bagi peserta didik yang kecepatan belajarnya tinggi (*advanced*) dan minta mereka mengerjakan latihan tanpa bantuan. Guru juga memberikan soal-soal dan mendampingi peserta didik yang mengalami kesulitan.



Ayo, Berefleksi

Ajak peserta didik melakukan refleksi terhadap apa yang sudah mereka pelajari dengan menjawab pertanyaan-pertanyaan pada rubrik **Ayo, Berefleksi** di Buku Siswa.

B. Fungsi Kuadrat



Kriteria Ketercapaian Tujuan Pembelajaran

- Peserta didik mampu menjelaskan karakteristik fungsi kuadrat terbuka ke atas atau ke bawah, mempunyai titik potong dengan sumbu $-x$ atau tidak, mempunyai titik maksimum atau titik minimum
- Peserta didik mampu menyelesaikan soal-soal fungsi kuadrat yang berkaitan dengan titik maksimum atau titik minimum dan titik potong dengan sumbu- x
- Peserta didik mampu mengkonstruksi fungsi kuadrat berdasarkan informasi yang ada



Sarana & Prasarana Pembelajaran

- Kertas berpetak
- Aplikasi GeoGebra



Apersepsi

Tunjukkan dan diskusikan contoh lintasan parabola selain lintasan bola basket dalam **Gambar 5.1** pada **Buku Siswa**. Contohnya, lintasan air mancur juga merupakan bentuk parabola.

Tunjukkan grafik fungsi kuadrat (**Gambar 5.8** pada **Buku Siswa**) dan minta peserta didik membandingkan dengan grafik garis lurus. Contoh perbedaan fungsi kuadrat dengan fungsi linear adalah kenaikan nilai fungsi berbanding lurus dengan kenaikan nilai x untuk fungsi linear. Pada fungsi

kuadrat kenaikan nilai fungsi tidak berbanding lurus dengan nilai x . Fungsi kuadrat adalah fungsi polinom (suku banyak) dengan pangkat tertinggi variabelnya adalah 2.

Gunakan bagian **Ayo, Mengingat Kembali** mengenai pengertian fungsi yang sudah dipelajari. Pertanyaan-pertanyaan berikut dapat digunakan untuk mengaktifkan prapengetahuan peserta didik.

1. Berikan beberapa soal, baik grafik ataupun soal cerita, dan tanyakan apakah merupakan fungsi atau bukan.
2. Apa karakteristik fungsi linear?



Pemanasan

Beberapa eksplorasi perlu dikerjakan untuk memahami dan memperdalam pemahaman tentang fungsi kuadrat.

Eksplorasi menggambar grafik ini disarankan untuk dikerjakan secara berkelompok.

- Jika tersedia aplikasi yang dapat membantu menggambar grafik secara cepat, silakan memanfaatkannya.
- Jika tidak tersedia, setiap peserta didik dapat diminta menggambar grafik fungsi yang berbeda sebelum memulai diskusi kelompok. Lalu grafiknya dapat digunakan bersama untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan selanjutnya.
- Jika dirasa kegiatan ini membutuhkan waktu terlalu lama, guru dapat meminta setiap kelompok untuk menginvestigasi sifat yang berbeda. Namun perlu dipastikan bahwa setiap peserta didik memahami semua sifat, misalnya melalui diskusi kelas dengan setiap kelompok memaparkan temuannya.

Peserta didik diharapkan dapat menemukan:

1. Tanda a menentukan grafik fungsi membuka ke atas/ke bawah.

| | |
|---------|--------------------------------|
| $a > 0$ | grafik membuka ke atas |
| $a < 0$ | grafik membuka ke bawah |

2. Nilai c menentukan titik potong grafik dengan sumbu y . Grafik memotong sumbu y di $(0, c)$.
3. Tanda D menentukan berapa banyak perpotongan grafik dengan sumbu x .

| | |
|---------|--|
| $D > 0$ | grafik memotong sumbu x di 2 titik |
| $D = 0$ | grafik menyinggung sumbu x |
| $D < 0$ | grafik tidak memotong sumbu x |

4. Sumbu simetri terletak pada $x = -\frac{b}{a}$
5. Nilai maksimum/minimum adalah $y = \frac{D}{-4a}$
6. Titik puncak parabola pada $\left(-\frac{b}{a}, \frac{D}{-4a}\right)$

1. Karakteristik Fungsi Kuadrat

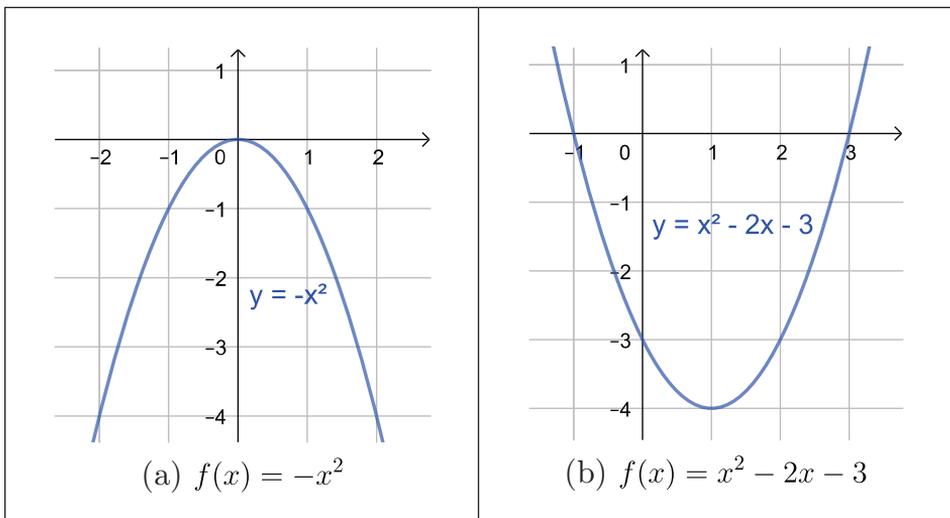
Eksplorasi 5.6 Karakteristik Fungsi Kuadrat

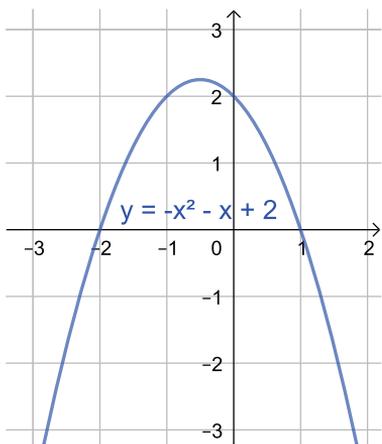


Ayo, Bekerja Sama

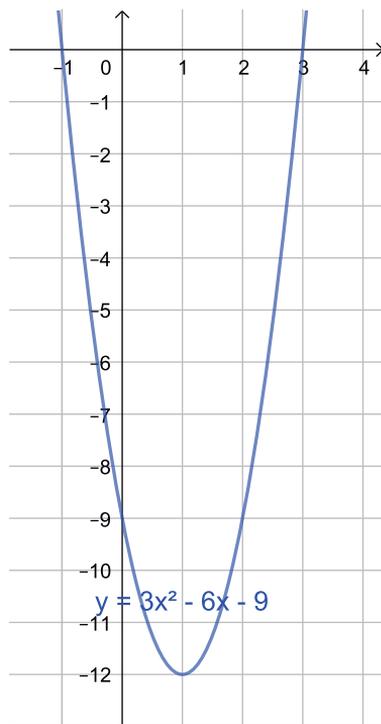
Kunci Jawaban

1.

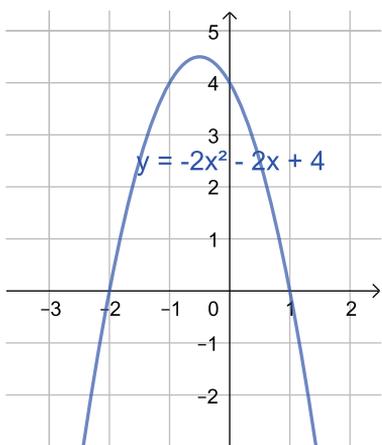




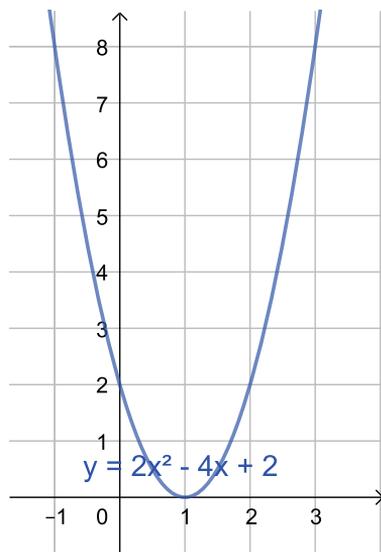
(c) $f(x) = -x^2 - x + 2$



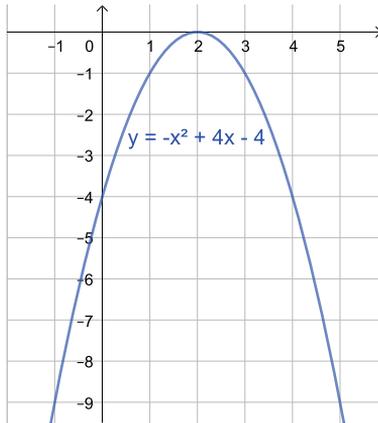
(d) $f(x) = 3x^2 - 6x - 9$



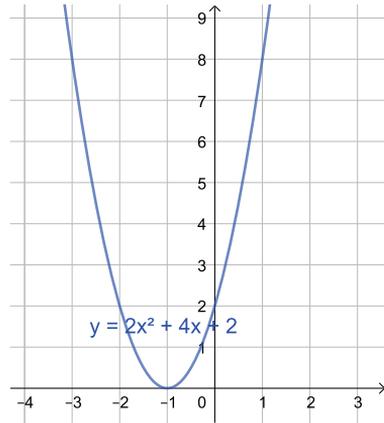
(e) $f(x) = -2x^2 - 2x + 4$



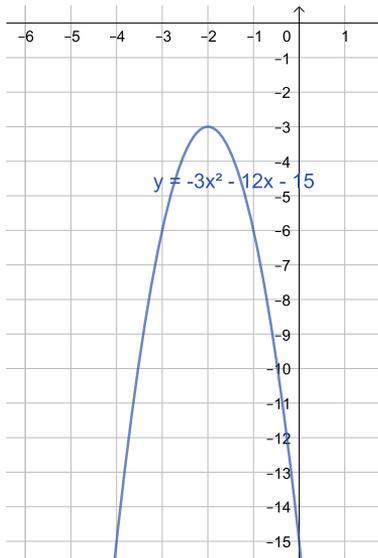
(f) $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$



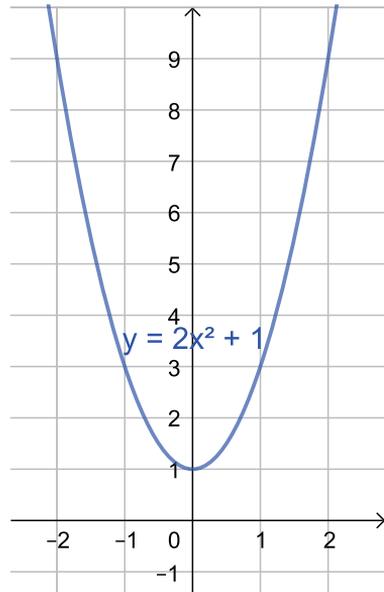
(g) $f(x) = -x^2 + 4x - 4$



(h) $f(x) = 2x^2 + 4x + 2$



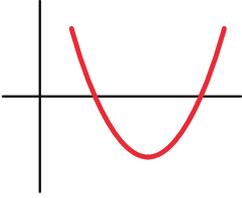
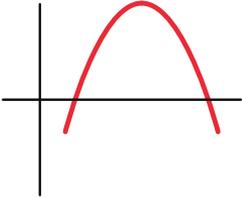
(i) $f(x) = -3x^2 - 12x - 15$



(j) $f(x) = 2x^2 + 1$

Cek pekerjaan setiap kelompok apakah grafik mereka sudah proporsional atau belum. Minta peserta didik mencermati sepuluh grafik yang telah dibuat dan mendaftarkan hal-hal istimewa yang mereka temui dalam grafik-grafik tersebut. Seiring dengan kegiatan eksplorasi yang mereka lakukan, mereka dapat mengecek daftar mereka dengan hasil eksplorasi.

2. a. $a > 0$ grafik (b), (d), (f), (h), dan (j) terbuka ke atas
- b. $a < 0$ (a), (c), (e), (g), dan (i) terbuka ke bawah
- c. Jika $a = 0$ maka fungsinya adalah $f(x) = bx + c$ yang merupakan fungsi linear
- d.

| $f(x) = ax^2 + bx + c$ | grafik berbentuk |
|------------------------|--|
| $a > 0$ | $a > 0$  |
| $a < 0$ | $a < 0$  |

Pastikan peserta didik memahami bahwa fungsi kuadrat terbuka ke atas atau ke bawah ditentukan oleh nilai koefisien a dari fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$. Uji pemahaman peserta didik dengan memberikan soal-soal lagi. Diskusikan bentuk fungsi kuadrat yang terbuka ke atas menunjukkan bahwa nilai fungsi bertambah hingga mencapai suatu nilai kemudian berkurang lagi. Diskusikan hal sebaliknya untuk fungsi kuadrat yang terbuka ke bawah.

Minta setiap kelompok melanjutkan eksplorasi untuk menyelidiki peran c dalam fungsi kuadrat. Gunakan kembali grafik-grafik (a)-(j) yang telah dibuat.

3. Titik potong grafik fungsi kuadrat dengan sumbu y .

| Fungsi $y = ax^2 + bx + c$ | Titik Potong Grafik Fungsi dengan Sumbu y | c |
|-------------------------------|--|-----|
| (a) $f(x) = -x^2$ | (0,0) | 0 |
| (b) $f(x) = x^2 - 2x - 3$ | (0,-3) | -3 |
| (c) $f(x) = -x^2 - x + 2$ | (0,2) | 2 |
| (d) $f(x) = 3x^2 - 6x - 9$ | (0,-9) | -9 |
| (e) $f(x) = -2x^2 - 2x + 4$ | (0,4) | 4 |
| (f) $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$ | (0,2) | 2 |
| (g) $f(x) = -x^2 + 4x - 4$ | (0,-4) | -4 |
| (h) $f(x) = 2x^2 + 4x + 2$ | (0,2) | 2 |
| (i) $f(x) = -3x^2 - 12x - 15$ | (0,-15) | -15 |
| (j) $f(x) = 2x^2 + 1$ | (0,1) | 1 |

Untuk setiap fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$, titik potong grafik dengan sumbu y terletak pada koordinat $(0, c)$

4.

| Fungsi $y = ax^2 + bx + c$ | $D = b^2 - 4ac$ | Banyak Titik Potong Grafik dengan Sumbu x |
|-----------------------------|-----------------|--|
| (a) $f(x) = -x^2$ | 0 | 1 |
| (b) $f(x) = x^2 - 2x - 3$ | 16 | 2 |
| (c) $f(x) = -x^2 - x + 2$ | 9 | 2 |
| (d) $f(x) = 3x^2 - 6x - 9$ | 144 | 2 |
| (e) $f(x) = -2x^2 - 2x + 4$ | 36 | 2 |
| (f) $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$ | 0 | 1 |
| (g) $f(x) = -x^2 + 4x - 4$ | 0 | 1 |

| Fungsi $y = ax^2 + bx + c$ | $D = b^2 - 4ac$ | Banyak Titik Potong Grafik dengan Sumbu x |
|-------------------------------|-----------------|---|
| (h) $f(x) = 2x^2 + 4x + 2$ | 0 | 1 |
| (i) $f(x) = -3x^2 - 12x - 15$ | -36 | Tidak ada |
| (j) $f(x) = 2x^2 + 1$ | -8 | Tidak ada |

- $D > 0$ b, c, d, e memotong sumbu X di dua titik.
- $D = 0$ a, f, g, h menyinggung sumbu X di satu titik.
- $D < 0$ i, j tidak memotong (maupun menyinggung) sumbu X.

| Fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$ | Banyak Akar $ax^2 + bx + c = 0$ | Banyak Titik Potong Grafik dengan Sumbu x |
|----------------------------------|------------------------------------|---|
| $D > 0$ | 2 berbeda | 2 |
| $D = 0$ | 2 kembar | 1 |
| $D < 0$ | tidak ada akar real | 0 |

5.

| Fungsi $y = ax^2 + bx + c$ | Sumbu simetri | |
|-------------------------------|--------------------|---------------------|
| a. $f(x) = -x^2$ | $x = 0$ | $x = r$ |
| b. $f(x) = x^2 - 2x - 3$ | $x = 1$ | $x = \frac{p+q}{2}$ |
| c. $f(x) = -x^2 - x + 2$ | $x = -\frac{1}{2}$ | $x = \frac{p+q}{2}$ |
| d. $f(x) = 3x^2 - 6x - 9$ | $x = 1$ | $x = \frac{p+q}{2}$ |
| e. $f(x) = -2x^2 - 2x + 4$ | $x = -\frac{1}{2}$ | $x = \frac{p+q}{2}$ |
| f. $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$ | $x = 1$ | $x = r$ |
| g. $f(x) = -x^2 + 4x - 4$ | $x = 2$ | $x = r$ |

| Fungsi $y = ax^2 + bx + c$ | Sumbu simetri | |
|-------------------------------|---------------|---------|
| h. $f(x) = 2x^2 + 4x + 2$ | $x = -1$ | $x = r$ |
| i. $f(x) = -3x^2 - 12x - 15$ | $x = -2$ | |
| j. $f(x) = 2x^2 + 1$ | $x = 0$ | |

6.

| Fungsi $y = ax^2 + bx + c$ | Titik puncak |
|-------------------------------|--------------------------------|
| a. $f(x) = -x^2$ | (0,0) |
| b. $f(x) = x^2 - 2x - 3$ | (1,-4) |
| c. $f(x) = -x^2 - x + 2$ | $(-\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4})$ |
| d. $f(x) = 3x^2 - 6x - 9$ | (1,-12) |
| e. $f(x) = -2x^2 - 2x + 4$ | $(-\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$ |
| f. $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$ | (1,0) |
| g. $f(x) = -x^2 + 4x - 4$ | (2,0) |
| h. $f(x) = 2x^2 + 4x + 2$ | (-1,0) |
| i. $f(x) = -3x^2 - 12x - 15$ | (-2,-3) |
| j. $f(x) = 2x^2 + 1$ | (0,1) |

Penentuan sumbu simetri dan titik maksimum/minimum semata-mata berdasarkan grafik saja.

Kunci Jawaban Latihan 5.6

- Jembatan A terbuka ke atas dan jembatan bawah B terbuka ke bawah

b. Lebar sempitnya grafik fungsi kuadrat terbuka ditentukan oleh nilai koefisien a dari fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$.

Untuk menjawab soal b ini minta peserta didik mengamati sepuluh grafik yang sudah dibuat.

2. a, d

3. b, c



Diferensiasi

Kembangkan soal-soal seperti dalam **Latihan 5.6** bagi peserta didik yang kecepatan belajarnya tinggi (*advanced*) dan minta mereka mengerjakan latihan tanpa bantuan.

Guru juga memberikan soal-soal bagi peserta didik yang mengalami kesulitan dan mendampingi mereka.

Jawaban Latihan 5.7

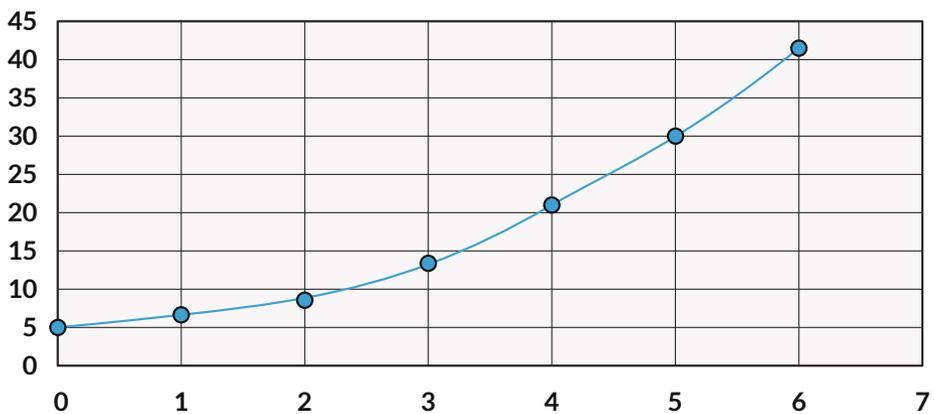
1. Tabel Jarak Terhadap Waktu

a.

| | | | | | | | |
|----------------------|---|---|---|----|----|----|----|
| Waktu (detik) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Jarak (m) | 5 | 6 | 9 | 14 | 21 | 30 | 41 |

b.

Jarak (m) terhadap waktu (detik)



c. Hasilnya menggambarkan bentuk parabola.

- d. $d = 5$
2. Fungsi kuadrat terbuka ke bawah karena nilai fungsi naik kemudian turun lagi.
 3. Fungsi kuadrat terbuka ke bawah karena nilai fungsi naik kemudian turun lagi.



Metode & Aktivitas Pembelajaran

Diskusikan bahwa setiap fungsi kuadrat mempunyai titik minimum atau titik maksimum. Kedua titik ini dinamakan titik puncak atau vertex. Tanyakan apa hubungan antara jenis titik puncak dengan fungsi kuadrat terbuka ke atas atau ke bawah.

Tunjukkan **Gambar 5.10** pada **Buku Siswa** dan minta peserta didik menyebutkan apa saja karakteristik dari fungsi kuadrat. Diskusikan manfaat nilai maksimum dan nilai minimum dalam kehidupan sehari-hari, misalnya ketinggian maksimum atau biaya minimum atau luas maksimum. Diskusikan juga peran titik potong dengan sumbu x dalam kehidupan sehari-hari, misalnya waktu yang diperlukan agar bola mencapai tanah atau jumlah barang yang menyebabkan keuntungan nol.

Jelaskan bahwa $D = b^2 - 4ac$ merupakan pembeda akar-akar persamaan kuadrat. D adalah singkatan dari diskriminan.



Ayo, Berpikir Kritis

1. Fungsi kuadrat yang $D < 0$ dan $a < 0$ grafiknya terbuka ke bawah dan tidak memotong (maupun menyinggung) sumbu X
2. Jika akar-akar persamaan $ax^2 + bx + c = 0$ adalah p dan q maka titik potong grafik fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$ dengan sumbu X adalah titik-titik $(p, 0)$ dan $(q, 0)$

Uji pemahaman peserta didik tentang diskriminan dengan memberikan beberapa soal baik berupa grafik maupun bentuk fungsinya. Tanyakan apa manfaat belajar diskriminan dalam menggunakan fungsi kuadrat untuk menyelesaikan masalah sehari-hari.



Diferensiasi

Kembangkan soal-soal seperti dalam **Latihan 5.8** bagi peserta didik yang kecepatan belajarnya tinggi (*advanced*) dan minta mereka mengerjakan latihan tanpa bantuan.

Guru juga memberikan soal-soal bagi peserta didik yang mengalami kesulitan dan mendampingi mereka.

2. Mengonstruksi Fungsi Kuadrat



Sarana & Prasarana Pembelajaran

Kertas berpetak

Eksplorasi

5.7

Menentukan Fungsi Kuadrat dari Lengkungan Busur



Ayo, Bereksplorasi

Tiga titik dipilih untuk mengonstruksi fungsi kuadrat. Ketiga titik adalah (0,0), (4,1) dan (-4,1).

Dari titik (0,0) maka $c = 0$

Dari titik (4,1) maka $1 = 16a + 4b$

Dari titik (-4,1) maka $1 = 16a - 4b$

Diperoleh $a = \frac{1}{16}$ dan $b = 0$

Fungsi kuadrat $f(x) = \frac{1}{16}x^2$



Metode & Aktivitas Pembelajaran

Jelaskan bahwa jika tiga titik diketahui maka digunakan sistem persamaan linear tiga variabel untuk menentukan nilai a , b , dan c . Ada cara lain untuk mengonstruksi fungsi kuadrat yaitu dengan menggunakan titik puncak.

Jika menggunakan titik puncak maka untuk lengkungan busur berlaku

$f(x) = ax^2$ karena $c = 0$ dan titik 0 melalui titik puncak.

Sehingga $1 = 16a$ dan $a = \frac{1}{16}$

Eksplorasi 5.8 Menuliskan Fungsi Kuadrat



Ayo, Bereksplorasi

1. a. $D > 0$

| Fungsi $y = ax^2 + bx + c$ | D | p | q | Fungsi dalam Bentuk $y = a(x - p)(x - q)$ |
|-------------------------------|-----|-----|-----|--|
| b. $f(x) = x^2 - 2x - 3$ | 16 | -1 | 3 | $f(x) = (x + 1)(x - 3)$ |
| c. $f(x) = -x^2 - x + 2$ | 9 | -2 | 1 | $f(x) = -(x + 2)(x - 1)$ |
| d. $f(x) = 3x^2 - 6x - 9$ | 144 | -1 | 3 | $f(x) = 3(x + 1)(x - 3)$ |
| e. $f(x) = -2x^2 - 2x + 4$ | 36 | -2 | 1 | $f(x) = -2(x + 2)(x - 1)$ |

b. $D = 0$

| Fungsi $y = ax^2 + bx + c$ | D | r | $y = a(x - r)^2$ |
|-------------------------------|-----|-----|---------------------|
| a. $f(x) = -x^2$ | 0 | 0 | $f(x) = -x^2$ |
| f. $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$ | 0 | 1 | $f(x) = 2(x - 1)^2$ |
| g. $f(x) = -x^2 + 4x - 4$ | 0 | 2 | $f(x) = -(x - 2)^2$ |
| h. $f(x) = 2x^2 + 4x + 2$ | 0 | -1 | $f(x) = 2(x + 1)^2$ |

c. $D < 0$

| Fungsi $y = ax^2 + bx + c$ | D | Tidak Ada Akar Real |
|-------------------------------|-----|---------------------|
| i. $f(x) = -3x^2 - 12x - 15$ | -36 | Tidak ada akar real |
| j. $f(x) = 2x^2 + 1$ | -8 | Tidak ada akar real |

d.

| Fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$ | Bentuk faktor | Koordinat titik potong dengan sumbu x |
|----------------------------------|-----------------------|---|
| $D > 0$ | $y = a(x - p)(x - q)$ | $(p, 0)$ dan $(q, 0)$ |
| $D = 0$ | $y = a(x - r)^2$ | $(r, 0)$ |
| $D < 0$ | - | - |

2. a.

| Fungsi $y = ax^2 + bx + c$ | Sumbu Simetri | Cara Mendapatkan Sumbu Simetri |
|-------------------------------|--------------------|--------------------------------|
| a. $f(x) = -x^2$ | $x = 0$ | $x = r$ |
| b. $f(x) = x^2 - 2x - 3$ | $x = 1$ | $x = \frac{p + q}{2}$ |
| c. $f(x) = -x^2 - x + 2$ | $x = -\frac{1}{2}$ | $x = \frac{p + q}{2}$ |
| d. $f(x) = 3x^2 - 6x - 9$ | $x = 1$ | $x = \frac{p + q}{2}$ |
| e. $f(x) = -2x^2 - 2x + 4$ | $x = -\frac{1}{2}$ | $x = \frac{p + q}{2}$ |
| f. $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$ | $x = 1$ | $x = r$ |
| g. $f(x) = -x^2 + 4x - 4$ | $x = 2$ | $x = r$ |
| h. $f(x) = 2x^2 + 4x + 2$ | $x = -1$ | $x = r$ |
| i. $f(x) = -3x^2 - 12x - 15$ | $x = -2$ | - |
| j. $f(x) = 2x^2 + 1$ | $x = 0$ | - |

b. Sumbu simetri

$$x = \frac{p + q}{2}$$

$$x = r$$

c. $x = -\frac{b}{2a}$ nilainya sama dengan sumbu simetri

d. Sumbu simetri dapat ditentukan berdasarkan titik potong grafik dengan sumbu -x dan dapat juga dengan memanfaatkan koefisien fungsi kuadrat.

3. a. Titik puncak

| Fungsi $y = ax^2 + bx + c$ | Titik puncak |
|-------------------------------|--------------------------------|
| a. $f(x) = -x^2$ | (0,0) |
| b. $f(x) = x^2 - 2x - 3$ | (1,-4) |
| c. $f(x) = -x^2 - x + 2$ | $(-\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4})$ |
| d. $f(x) = 3x^2 - 6x - 9$ | (1,-12) |
| e. $f(x) = -2x^2 - 2x + 4$ | $(-\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$ |
| f. $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$ | (1,0) |
| g. $f(x) = -x^2 + 4x - 4$ | (2,0) |
| h. $f(x) = 2x^2 + 4x + 2$ | (-1,0) |
| i. $f(x) = -3x^2 - 12x - 15$ | (-2,-3) |
| j. $f(x) = 2x^2 + 1$ | (0,1) |

b. Absis titik puncak = sumbu simetri

c. Substitusi nilai sumbu simetri $x = -\frac{b}{2a}$ pada $f(x) = ax^2 + bx + c$ menghasilkan ordinat titik puncak

d. Ordinat titik puncak $y = \frac{D}{-4a}$ menunjukkan nilai maksimum atau minimum dari fungsi kuadrat

e. Koordinat titik puncak $(h, k) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{D}{-4a}\right)$
 $h = -\frac{b}{2a}$ dan $k = \frac{D}{-4a}$

Nilai $(h, k) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{D}{-4a}\right)$ adalah koordinat titik puncak.

- f. Ada berbagai cara untuk menentukan koordinat titik puncak grafik fungsi kuadrat:
- Untuk fungsi kuadrat yang berbentuk $y = ax^2 + bx + c$, koordinat titik puncaknya adalah $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{D}{-4a}\right)$
 - Untuk fungsi kuadrat yang berbentuk $y = a(x - h)^2 + k$ koordinat titik puncaknya adalah (h, k)
 - Untuk fungsi kuadrat yang berbentuk $y = a(x - p)(x - q)$ absis titik puncaknya didapat dengan $x = \frac{p + q}{2}$ dan ordinat dengan substitusi nilai absis pada fungsi.
 - Untuk fungsi kuadrat yang berbentuk $y = a(x - r)^2$ absis titik puncaknya didapat dengan $x = r$ dan ordinat dengan substitusi nilai absis pada fungsi.

Uji pemahaman peserta didik dengan memberikan lagi soal-soal apakah mereka sudah dapat mengonstruksi fungsi kuadrat atau mengubahnya dari satu bentuk ke bentuk yang lain.

Kunci Jawaban Latihan 5.9

1. Titik puncak (2,6) maka bentuknya $f(x) = a(x - 2)^2 + 6$

Melalui (1,7) maka $7 = a(1 - 2)^2 + 6$

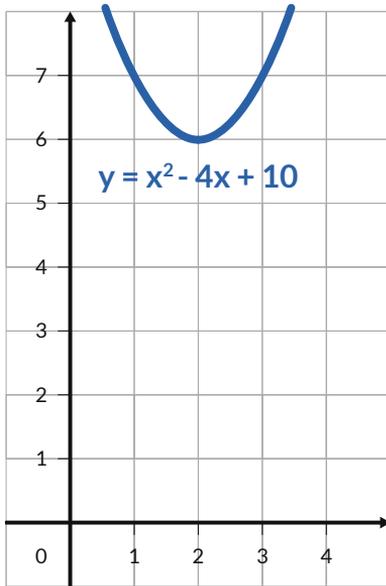
$$f(x) = a(x - 2)^2 + 6$$

$$7 = a(1 - 2)^2 + 6$$

$$a = 1$$

Jadi $f(x) = (x - 2)^2 + 6$ atau $f(x) = x^2 - 4x + 10$

Perhatikan grafiknya, fungsi ini tidak memotong sumbu X, jadi tidak dapat dinyatakan dalam bentuk $f(x) = a(x - p)(x - q)$

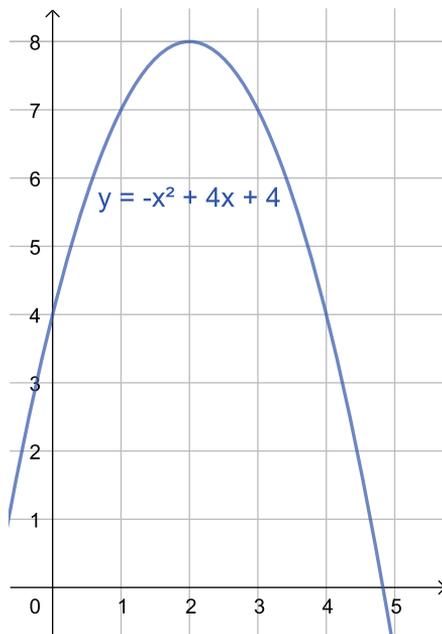


2. Titik-titik yang dilalui (0,4) dan titik puncaknya (2,8).

Titik puncak $\rightarrow f(x) = a(x - 2)^2 + 8$

Melalui (0,4) $\rightarrow 4 = a(4) + 8$ maka $a = -1$

Fungsinya $f(x) = -(x - 2)^2 + 8$ atau $f(x) = -x^2 + 4x + 4$



3. a. $D > 0$
- b. $D > 0$
- c. $D > 0$
- d. $D > 0$
- e. $D > 0$



Diferensiasi

Kembangkan soal-soal seperti dalam **Latihan 5.9** bagi peserta didik yang kecepatan belajarnya tinggi (*advanced*) dan minta mereka mengerjakan latihan tanpa bantuan.

Guru juga memberikan soal-soal bagi peserta didik yang mengalami kesulitan dan mendampingi mereka.

3. Menyelesaikan Masalah dengan Fungsi Kuadrat



Sarana & Prasarana Pembelajaran

Kertas berpetak

Diskusikan mengapa fungsi kuadrat sering digunakan sebagai model dalam penyelesaian masalah. Buat kelompok untuk melakukan eksplorasi. Peserta didik dapat menggunakan aplikasi GeoGebra untuk mendapatkan grafik dan aplikasi *Spreadsheet* bagian *regression* dari data analisis untuk mendapatkan konstanta-konstanta a , b , dan c dari fungsi kuadrat. Jika tidak menggunakan aplikasi *Spreadsheet*, maka peserta didik dapat memilih cara untuk mengonstruksi fungsi kuadrat seperti yang ada dalam subbab 2.

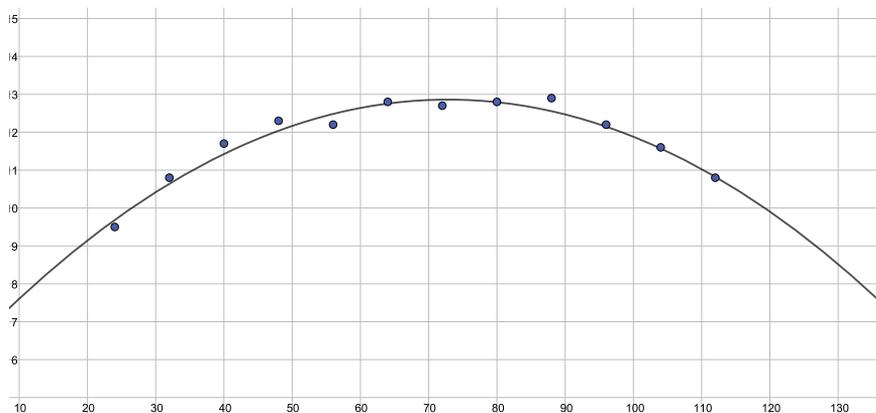
Eksplorasi 5.9 Menentukan Penghematan Maksimum dari Grafik



Ayo, Bereksplorasi

$$P(x) = -0,00133x^2 + 0,1938x + 5,8$$

Kelajuan yang memberikan penghematan bahan bakar maksimum adalah 72,8 km/jam.



Eksplorasi 5.10 Menentukan Luas Maksimum



Ayo, Bereksplorasi

Jika L menyatakan luas daerah yang dibatasi, maka $L = 3xy$.

Sedangkan

$$6x + 2y = 96$$

$$3x + 2y = 48$$

$$y = 24 - \frac{3}{2}x$$

Luas daerah

$$\begin{aligned} L &= 3xy \\ &= 3x \left(24 - \frac{3}{2}x \right) \\ L(x) &= 72x - \frac{9}{2}x^2 \end{aligned}$$

Luas maksimum adalah titik puncak dari fungsi kuadrat ini. Titik puncak terletak pada sumbu simetri.

Sumbu simetri

$$\begin{aligned} x &= -\frac{72}{-9} \\ &= 8 \end{aligned}$$

Luas maksimum adalah nilai fungsi pada sumbu simetri.

$$\begin{aligned}L_{\max} &= L(8) \\ &= 72 \cdot 8 - \frac{9}{2} \cdot 8^2 \\ &= 576 - 288 \\ &= 288\end{aligned}$$



Ayo, Mencoba

Kunci Jawaban

Pendapatan

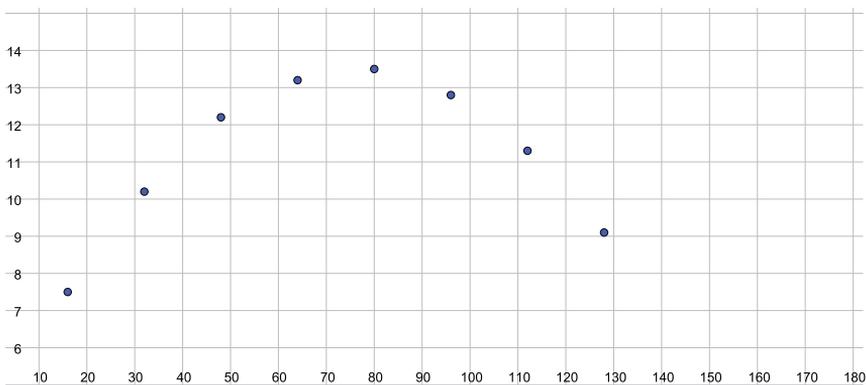
$$R = 900x - 0,25x^2$$

Pendapatan maksimum didapat saat nilai x di sumbu simetri

$$\begin{aligned}x &= -\frac{b}{2a} \\ &= -\frac{900}{2(-0,25)} = 1.800\end{aligned}$$

Kunci Jawaban Latihan 5.10

1. Berdasarkan data dalam tabel maka untuk fungsi linear jika waktu bertambah satu detik maka jarak bertambah 2 m, sedangkan untuk fungsi kuadrat perubahan pertambahan jarak sebanyak 2 m ketika waktu bertambah satu detik. Pertambahan jarak tidak konstan.
2. Fungsi kuadrat $P(x) = -0,00165x^2 + 0,251x + 3,9$
Penghematan maksimum terjadi pada kelajuan 80 km/jam.



3. Fungsi eksponen tidak memiliki nilai minimum maupun nilai maksimum.



Diferensiasi

Kembangkan soal-soal seperti dalam **Latihan 5.10** bagi peserta didik yang kecepatan belajarnya tinggi (*advanced*) dan minta mereka mengerjakan latihan tanpa bantuan.

Guru juga memberikan soal-soal bagi peserta didik yang mengalami kesulitan dan mendampingi mereka



Ayo, Berefleksi

Ajak peserta didik melakukan refleksi terhadap apa yang sudah mereka pelajari dengan menjawab pertanyaan pada rubrik Ayo, Berefleksi di Buku Siswa.

Kunci Jawaban

Uji Kompetensi

1. $x^2 - x = 600$
 $(x - 25)(x + 24) = 0$

Sisi persegi adalah 25 karena sisi tidak mungkin bernilai negatif.

2. $x^2 - 5x - 14 = 0$.

a. Penjumlahan kedua akar persamaan kuadrat $= -\frac{b}{a} = -\frac{-5}{1} = 5$

Perkalian kedua akar persamaan kuadrat $= \frac{c}{a} = \frac{-14}{1} = -14$

b. Penjumlahan kedua akar persamaan kuadrat yang baru adalah

$$x_1 + 3 + x_2 + 3 = (x_1 + x_2) + 3 + 3 = 11.$$

Perkalian kedua akar persamaan kuadrat yang baru adalah

$$\begin{aligned}(x_1 + 3)(x_2 + 3) &= x_1x_2 + 3(x_1 + x_2) + 9 \\ &= -14 + 3(5) + 9 = 10\end{aligned}$$

Persamaan kuadrat yang baru adalah $x^2 - 11x + 10 = 0$

c. Penjumlahan kedua akar persamaan kuadrat yang baru adalah $3x_1 + 3x_2 = 3(x_1 + x_2) = 3 \times 5 = 15$.

Perkalian kedua akar persamaan kuadrat yang baru adalah

$$(3x_1)(3x_2) = 9x_1x_2 = 9 \times (-14) = -126$$

Persamaan kuadrat yang baru adalah $x^2 - 15x - 126 = 0$

3. $2x^2 - 7x - 6 = 0$

a. Penjumlahan kedua akar persamaan kuadrat $= -\frac{-7}{2} = \frac{7}{2}$

Perkalian kedua akar persamaan kuadrat $= \frac{-6}{2} = -3$

b. Penjumlahan kedua akar persamaan kuadrat yang baru adalah

$$x_1 + \frac{1}{2} + x_2 + \frac{1}{2} = x_1 + x_2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{7}{2} + 1 = \frac{9}{2}$$

c. Perkalian kedua akar persamaan kuadrat yang baru adalah

$$\begin{aligned} \left(x_1 + \frac{1}{2}\right) \left(x_2 + \frac{1}{2}\right) &= x_1x_2 + \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \frac{1}{4} \\ &= -3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{2} + \frac{1}{4} = -1 \end{aligned}$$

Persamaan kuadrat yang baru adalah $x^2 - \frac{9}{2}x - 1 = 0$ atau

$$2x^2 - 9x - 2 = 0$$

4. Bola basket tidak akan masuk ke dalam keranjang. Berdasarkan simetri dari gerak parabola dapat ditentukan posisi bola basket.

5. Konsentrasi obat menjadi nol jika $C(t) = -0,0003t^2 + 0,09t = 0$. Hal ini terjadi pada saat $t = 300$ menit.

Konsentrasi maksimum terjadi pada saat $t = 150$ menit. Konsentrasi pada saat $t = 150$ menit sebesar 6,75 mg/L.

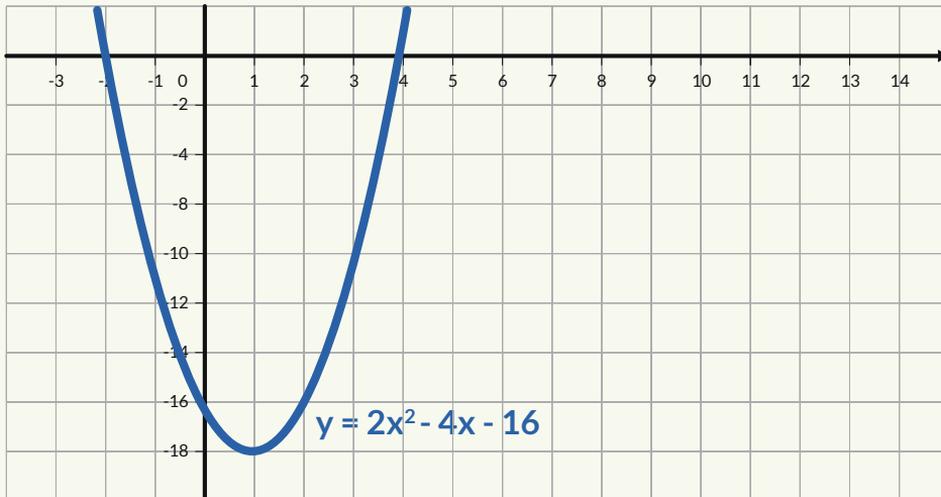
6. a. $J(p) = \frac{2}{3}p$

b. $U(p) = pJ(p) - 2000p = \frac{2}{3}p^2 - 2000p$

c. Penjualan maksimum adalah terjadi pada saat $p = 1500$.

7. grafik b

8.



- a. Memotong sumbu X di $(-2,0)$ dan $(4,0)$
- b. Memotong sumbu Y di $(0,-16)$
- c. Sumbu simetri $x = 1$
- d. Nilai minimum, yaitu $(1,-18)$

9. Ketinggian maksimum dapat dihitung

a. **Alternatif 1**

$$h(t) = -5t(t - 8)$$

memotong sumbu X di $(0,0)$ dan $(8,0)$

$$\text{Sumbu simetrinya } x = \frac{0+8}{2} = 4$$

$$\begin{aligned} h(4) &= -5(4)(4 - 8) \\ &= 80 \end{aligned}$$

b. **Alternatif 2**

$$\begin{aligned} D &= b^2 - 4ac \\ &= 40^2 - 4(-5)(0) \\ &= 1600 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{D}{-4a} &= \frac{1600}{-4(-5)} \\ &= 80 \end{aligned}$$

10. Ketinggian maksimum dapat dihitung

a. **Alternatif 1**

$$P(q) = -20q(q - 150)$$

Memotong sumbu X di (0,0) dan (150,0)

$$\text{Sumbu simetrinya } x = \frac{0 + 150}{2} = 75$$

$$\begin{aligned} P(75) &= -20(75)(75 - 150) \\ &= 112.500 \end{aligned}$$

b. **Alternatif 2**

$$\begin{aligned} \frac{D}{-4a} &= \frac{9.000.000}{-4(-20)} \\ &= 112.500 \end{aligned}$$

Pengayaan

Penjelasan bagian Pengayaan dapat diakses pada tautan berikut.

<https://buku.kemdikbud.go.id/s/v2ymag>



Refleksi

Pada akhir pembelajaran bab ini, minta peserta didik untuk memikirkan kembali apa saja yang sudah mereka pelajari dengan menjawab pertanyaan-pertanyaan penuntun sebagai upaya guru untuk memastikan bahwa peserta didik sudah mencapai tujuan pembelajaran. Uji kompetensi juga diberikan untuk mengukur ketercapaian tujuan pembelajaran dari bab ini.



Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Republik Indonesia, 2023

**Panduan Guru Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas X
(Edisi Revisi)**

Penulis: Dicky Susanto, dkk.
ISBN: 978-623-118-562-4

Bab

6

Panduan Khusus

Representasi dan Interpretasi Data



? Bagaimana Representasi dan Interpretasi Data dapat membantu kita dalam pengambilan keputusan?

Pendahuluan

Setelah mempelajari bab ini, peserta didik diharapkan dapat merepresentasikan data dalam berbagai bentuk grafik dan menganalisisnya, menentukan grafik yang sesuai dengan jenis data yang ingin ditampilkan serta mampu menghitung ukuran pemusatan dan ukuran penyebaran dari suatu kelompok data serta menggunakannya untuk membandingkan dua kelompok.

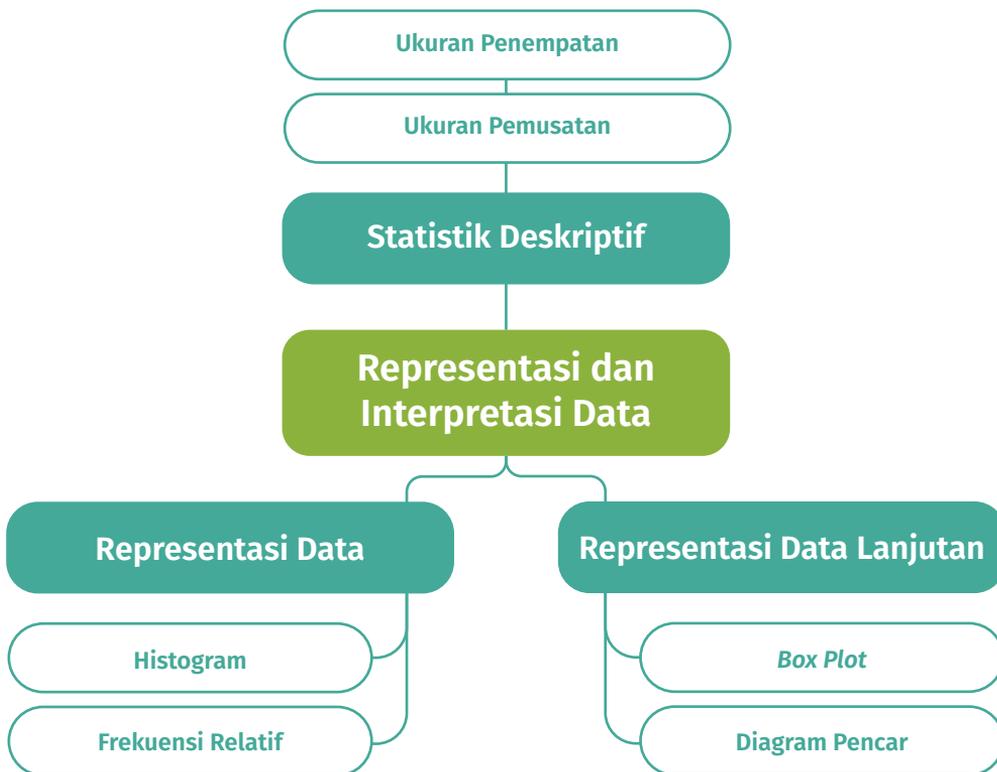
Untuk memastikan bahwa tujuan pembelajaran telah tercapai, beberapa kriteria berikut dapat digunakan:

- Peserta didik mampu membedakan berbagai jenis data serta membuat grafik yang sesuai
- Peserta didik mampu merepresentasikan dan menganalisis data untuk pengambilan kesimpulan.
- Peserta didik mampu menggambar dan menganalisis diagram batang dan histogram
- Peserta didik mampu menghitung dan memilih ukuran pemusatan yang tepat: *mean*, modus dan median
- Peserta didik mampu menghitung dan menggunakan ukuran penempatan dalam masalah sehari-hari
- Peserta didik mampu menentukan ukuran penempatan dari kumpulan data: kuartil dan persentil dari data tunggal dan data kelompok
- Peserta didik mampu menggambar dan menganalisis diagram box-and-whisker
- Peserta didik mampu menggambar dan menganalisis diagram pencar

Bab representasi dan interpretasi data bertujuan mengembangkan kemampuan peserta didik untuk memahami dan bernalar mengenai representasi dan interpretasi data. Peserta didik akan dapat memilih tampilan data yang sesuai dan menginterpretasi data menurut bentuk distribusi data dan menggunakan ukuran pemusatan dan ukuran lokasi. Mereka membangun pemahaman bagaimana menghitung ukuran pemusatan sederhana (*mean*, modus, dan median) data tunggal yang sudah dipelajari di SMP. Ukuran pemusatan di kelas X mencakup *mean*, median, dan modus baik

data tunggal maupun data kelompok. Ukuran penempatan mencakup kuartil dan persentil.

Peta Materi



Bab ini disarankan diselesaikan dalam 18 JP, namun guru dapat menyesuaikan dengan kondisi satuan pendidikan setempat dengan memperhitungkan keragaman kondisi, potensi, kemampuan individu peserta didik, dan dinamika kelas.

Konsep dan Keterampilan Prasyarat

Keterampilan prasyarat yang perlu dimiliki peserta didik ialah menyelesaikan statistika dasar mengenai pengumpulan, pengolahan dan analisis data yang terdapat pada Capaian Pembelajaran Fase D. Jika ada peserta didik yang kesulitan, guru dapat merujuk pada buku teks utama Matematika fase D.

Penyajian Materi Esensial

Pada subbab A, peserta didik melakukan pengamatan dan berdiskusi mengenai perbedaan antara diagram batang dengan histogram. Setelah berhasil mengidentifikasi perbedaan antara diagram batang dengan histogram, mereka juga diajak untuk melihat bahwa dari sumber data yang sama, dapat dihasilkan 2 histogram yang berbeda. Selain itu, peserta didik mengamati bagaimana diagram batang dan histogram tidak selalu menggunakan frekuensi sesungguhnya, tetapi menggunakan frekuensi relatif. Diharapkan peserta didik mampu menggunakan frekuensi relatif saat membandingkan dua kelompok dengan total data yang berbeda.

Pada subbab B, peserta didik mengulang materi SMP mengenai mencari ukuran pemusatan: *mean*, median, dan modus data tunggal. Tidak hanya menghitung, peserta didik juga dapat menentukan ukuran pemusatan mana yang paling sesuai untuk masalah kontekstual tertentu. Peserta didik juga mengamati bahwa walaupun ukuran penempatan (kuartil dan persentil) data tunggal dapat digunakan untuk mendapatkan gambaran data secara keseluruhan untuk mengambil keputusan.

Pada subbab C, peserta didik akan menggunakan Diagram Box-and-Whisker dan diagram pencar untuk menganalisis suatu kumpulan data atau membandingkan 2 kelompok data.

Secara umum, pada bab ini, peserta didik akan mempelajari bagaimana pemilihan diagram yang tepat akan membantu mereka dalam memahami dan menganalisis data dengan lebih baik.

Apersepsi

Perkenalkan bab ini dengan bertanya kepada peserta didik kapan konsep statistik muncul di dalam kehidupan mereka sehari-hari.

Penilaian Sebelum Pembelajaran

Gunakan bagian **Ayo, Mengingat Kembali** mengenai diagram sederhana dan menghitung ukuran pemusatan data tunggal yang sudah dipelajari di SMP. Pertanyaan-pertanyaan berikut dapat digunakan untuk mengaktifkan prapengetahuan peserta didik.

- Diagram apa saja yang pernah kamu pelajari saat SMP?
- Pernahkah kamu melihat diagram lingkaran? Diagram batang?
- Informasi apa saja yang ada di dalam diagram lingkaran?
- Informasi apa saja yang ada di dalam diagram batang?

Panduan Pembelajaran

A. Representasi Data



Kriteria Ketercapaian Tujuan Pembelajaran

- Peserta didik mampu membedakan berbagai jenis data serta membuat grafik yang sesuai
- Peserta didik mampu merepresentasikan dan menganalisis data untuk pengambilan kesimpulan
- Peserta didik mampu menggambar dan menganalisis diagram batang dan histogram.



Sarana & Prasarana Pembelajaran

- Kertas kotak-kotak/milimeter blok
- Penggaris
- Kalkulator saintifik



Apersepsi

Perkenalkan bab ini dengan bertanya kepada peserta didik kapan konsep statistik muncul di dalam kehidupan mereka sehari-hari. Setelah itu, sampaikan tiga pertanyaan pemantik dan beri tahu peserta didik bahwa mereka akan memikirkan dan mencoba mendapatkan jawaban terhadap tiga pertanyaan berikut ini selama pembelajaran bab mengenai statistika.

1. Bagaimana pengolahan data dapat membantu kita dalam pengambilan keputusan?

2. Bagaimana kita menentukan ukuran pemusatan yang paling sesuai dengan konteks masalah yang dihadapi?
3. Bagaimana ukuran pemusatan dan ukuran penyebaran dapat membantu kita untuk membedakan 2 kelompok data?

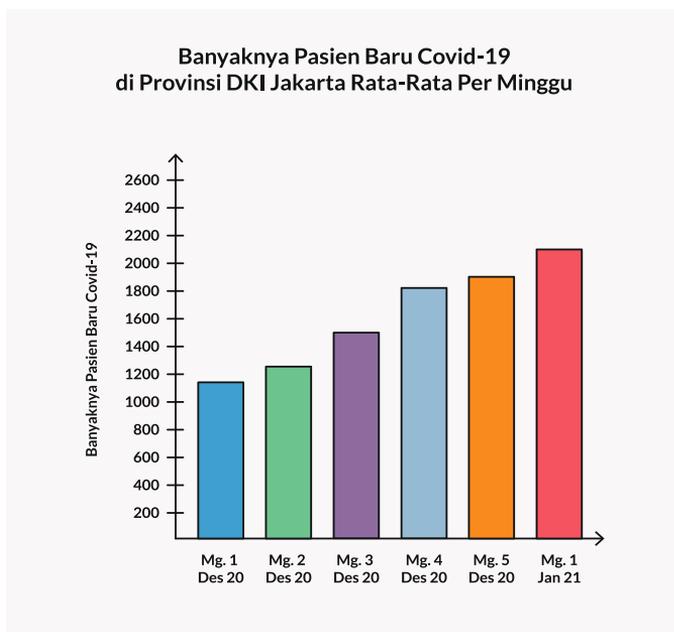
Eksplorasi 6.1 Penggunaan Diagram Batang untuk Menganalisis Data



Ayo, Bereksplorasi

Mulai aktivitas pembelajaran dengan membahas data penambahan kasus Covid-19 yang pernah dilihat oleh peserta didik baik di media elektronik, maupun di media daring. Kemudian minta peserta didik melakukan **Eksplorasi 6.1**. Mereka melakukan pengamatan data yang terdapat pada **Tabel 6.1** lalu melengkapi diagram batang berdasarkan data pada **Tabel 6.1**. Peserta didik dapat melakukan eksplorasi sendiri-sendiri terlebih dahulu kemudian baru diskusi secara berpasangan atau dalam kelompok, atau langsung bekerja sama berpasangan atau di dalam kelompok.

1. Minggu ke-4 Desember 2020 memiliki kenaikan paling tinggi yaitu sebanyak $1.830 - 1.520 = 310$
2. Berikut ini diagram batang yang sudah dilengkapi.





Ayo, Berdiskusi

Setiap peserta didik memberikan estimasi disertai alasannya. Soal no. 3 ini merupakan soal dengan banyak solusi, tetapi memotivasi peserta didik untuk berani memberikan estimasi dan menjelaskan alasannya.

3. Kemungkinan jawaban dari peserta didik

Alternatif 1: 2.420, karena dari data sebelumnya ada beberapa data yang kenaikannya sekitar 300, jadi $2.120 + 300 = 2.420$ kasus pada minggu kedua Januari 2021

Alternatif 2: sekitar 2.332, karena dari data sebelumnya rata-rata kenaikan sekitar 10% dari minggu sebelumnya. Jadi penambahan kasus pada minggu kedua Januari 2021 sebanyak $2.120 \times 10\% = 212$ kasus. Total kasus pada minggu kedua Januari 2021 sebanyak $2.120 + 212 = 2.332$

Alternatif 3: antara 2.500 dan 2.700, karena minggu kedua Januari 2021, tepat 2 minggu dari liburan panjang Natal dan Tahun Baru. Pada kejadian sebelumnya, setelah libur panjang, penambahan kasus akan lebih dari biasanya. Perkiraan akan bertambah 400 sampai 600 kasus.



Ayo, Berpikir Kritis

Pemilihan grafik yang tepat akan memberikan gambaran yang lebih tepat.

4. Untuk melihat peningkatan kasus, grafik memberikan gambaran yang lebih cepat, yaitu dengan melihat beda panjang batang yang bersebelahan dengan selisih terbesar.

1. Histogram

Pada bagian ini, peserta didik diminta melakukan pengamatan beda histogram (**Gambar 6.1**) dengan diagram batang (**Gambar 6.2**).



Ayo, Berdiskusi

Dari **Gambar 6.1** dan **Gambar 6.2**, carilah perbedaan dari histogram dan diagram batang.

Kemungkinan jawaban peserta didik ialah sebagai berikut.

- Batang pada histogram saling menempel, sedangkan batang pada diagram batang terpisah satu sama lain.
- Pada histogram, lebar batang tidak selalu sama besar, tetapi pada diagram batang, lebar semua batang sama.
- Data pada diagram batang merupakan data yang bersifat kategori yaitu merek HP, sedangkan data pada histogram merupakan data kuantitatif atau data berupa bilangan, yaitu lama (waktu) penggunaan HP.



Ayo, Berdiskusi

Gambar 6.3 menyajikan data yang sama, tetapi menghasilkan dua histogram berbeda. Hal itu dikarenakan ada penggabungan 2 kelas, yaitu 0–2 dan 2–4 menggunakan prinsip luas persegi panjang.



Ayo, Mencoba

Mengapa kelas 8–10 dan kelas 10–12 pada histogram kiri dapat digabung menjadi kelas 8–12 pada histogram kanan?

Pada histogram kiri:

Luas kelas 8–10 adalah $2 \times 12 = 24$

Luas kelas 10–12 adalah $2 \times 4 = 8$

Luas gabungan kelas 8–10 dan 10–12 adalah $24 + 8 = 32$

Pada histogram kanan:

Luas kelas 8–12 adalah $4 \times 8 = 32$

Luas gabungan kelas 8–10 dan 10–12 pada histogram kiri sama dengan luas kelas 8–12 pada histogram kanan. Jadi, kedua histogram menampilkan data yang sama hanya dalam tampilan diagram batang yang berbeda.

Kaitkan hasil pengamatan peserta didik terhadap tabel dan histogram yang diberikan dengan penjelasan konsep dan tampilkan contoh-contoh bagaimana menggambar histogram berdasarkan tabel data. Khususnya, perbedaan jenis data kategori dan data kuantitatif sehingga dapat menentukan jenis diagram apakah diagram batang atau histogram dengan lebih tepat. Diskusikan jika masih ada yang belum jelas atau membingungkan.

Mintalah peserta didik mengerjakan **Latihan 6.1** untuk memeriksa pemahaman mereka.



Diferensiasi

Bagi peserta didik yang mengalami kesulitan dalam menggabungkan kelas pada histogram, minta peserta didik melihat banyaknya persegi kecil pada masing-masing kelas di histogram kiri dan kanan.

Misal, banyaknya persegi kecil di kelas 0–2 ada sebanyak 8 persegi dan banyaknya persegi kecil di kelas 2–4 ada sebanyak 16 persegi, sehingga total persegi kecil ada sebanyak 24 buah. Lakukan hal yang sama pada histogram kanan dengan menghitung banyaknya persegi kecil lalu membandingkannya.

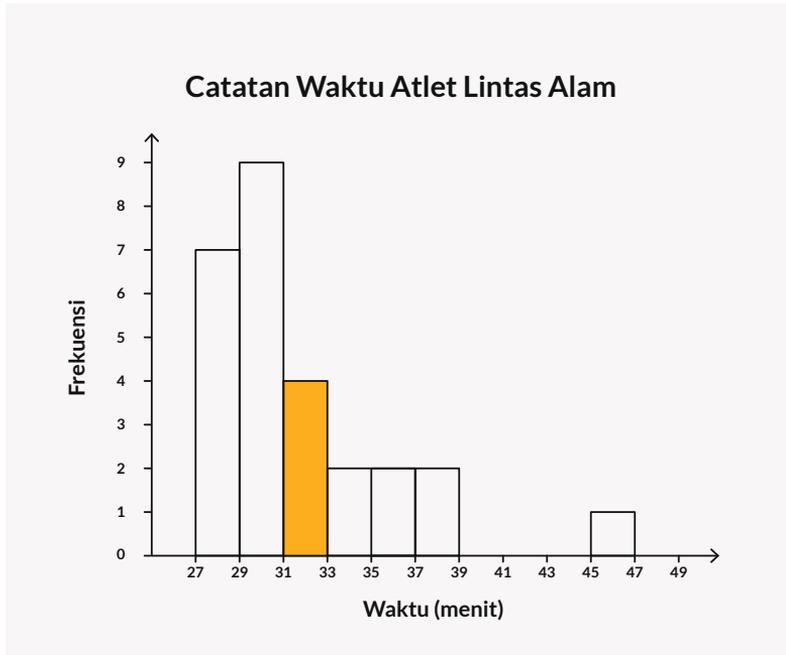
Kunci Jawaban Latihan 6.1

1. a. 25 atlet; 20 negara
b. Peraih medali emas: Norwegia 1; sekitar 27 menit
c. 8 pelari
d. Menggunakan histogram dengan data catatan waktu di sumbu x dan banyaknya atlet di sumbu y . Pertanyaan yang dapat dijawab dengan histogram ini adalah berapa banyak pelari yang memiliki catatan waktu antara 30–35 menit?

2. a.

| Catatan Waktu Atlet (menit:detik) | Frekuensi |
|-----------------------------------|-----------|
| 27:00–28:59 | 7 |
| 29:00–30:59 | 9 |
| 31:00–32:59 | 4 |
| 33:00–36:59 | 2 |
| 37:00–38:59 | 2 |
| 39:00–40:59 | 0 |
| 41:00–42:59 | 0 |
| 43:00–44:59 | 0 |
| 45:00–46:59 | 1 |
| 47:00–48:59 | 0 |

b.



c. Interval 29:00–30:59

d. Mayoritas atlet berlari dengan waktu di bawah 31 menit. Hampir tidak ada atlet yang berlari dengan waktu lebih dari 39 menit.

2. Frekuensi Relatif

Pada bagian ini, diawali dengan kegiatan **Eksplorasi 6.2**.

Eksplorasi 6.2 Frekuensi Relatif dalam Histogram



Ayo, Bereksplorasi

Peserta didik melakukan pengamatan **Gambar 6.5**.

Guru dapat menanyakan hal sebagai berikut sebagai pertanyaan penuntun.

Kamu sebelumnya telah belajar mengenai histogram. Apakah perbedaan histogram pada **Gambar 6.5** dengan yang sebelumnya? (pada sumbu y , kali ini tertulis persentase jumlah peserta didik, bukan hanya jumlah peserta didik)

Lalu guru dapat melanjutkan dengan pertanyaan yang ada di Buku Siswa:

- Dari histogram pada **Gambar 6.5**, ditunjukkan bahwa ada 16% peserta didik yang mendapatkan nilai matematika di antara 70 sampai 75. Apakah ini berarti ada 16 peserta didik yang berada di kelas tersebut? Jelaskan. (Jika banyaknya peserta didik tepat ada sebanyak 100 orang, maka 16% juga menyatakan jumlah peserta didik sebanyak 16 orang di kelas 70–75, namun karena kita tidak mengetahui banyaknya peserta didik, maka 16% pada sumbu y belum tentu sama dengan 16 orang)
- Interval kelas manakah yang memiliki persentase terbesar? (Kelas 80–85) Berapa persen kelas dengan interval tersebut? (24%)
- Misalkan ada 200 peserta didik yang mengikuti ulangan matematika tersebut. Berapakah banyaknya peserta didik yang mendapatkan nilai 85 ke atas tapi di bawah 90? (Kelas 85–90 memiliki persentase 18%, maka banyaknya peserta didik di kelas tersebut sebanyak $18\% \times 200$ peserta didik = 36 peserta didik.)
- Apabila kamu menambahkan seluruh persen pada setiap interval, berapakah seharusnya jumlah total persen yang kamu peroleh? Jelaskan. (Total persentase tidak mungkin melebihi 100%, berikan kesempatan kepada peserta didik untuk menguji pernyataan ini dengan melihat persentase tiap kelas dan menjumlahkannya)

Kunci Jawaban Latihan 6.2



Ayo, Bekerja Sama

Ayo bekerja sama melengkapi tabel di bawah ini agar waktu yang diperlukan menjadi lebih sedikit.

1. Kamu pernah belajar mengenai perkalian dari 0×0 sampai 12×12 . Lengkapi tabel perkalian di bawah ini.

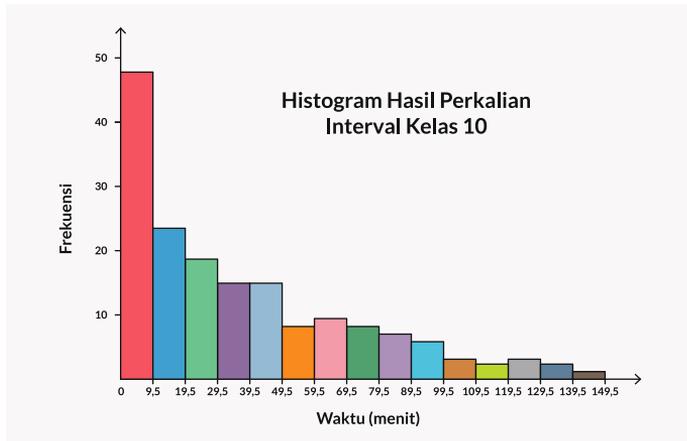
| \times | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|----------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

| | | | | | | | | | | | | | |
|----|---|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|
| × | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 2 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 |
| 3 | 0 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | 30 | 33 | 36 |
| 4 | 0 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 | 40 | 44 | 48 |
| 5 | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 | 55 | 60 |
| 6 | 0 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 | 60 | 66 | 72 |
| 7 | 0 | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 | 70 | 77 | 84 |
| 8 | 0 | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 | 80 | 88 | 96 |
| 9 | 0 | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 | 90 | 99 | 108 |
| 10 | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 | 110 | 120 |
| 11 | 0 | 11 | 22 | 33 | 44 | 55 | 66 | 77 | 88 | 99 | 110 | 121 | 132 |
| 12 | 0 | 12 | 24 | 36 | 48 | 60 | 72 | 84 | 96 | 108 | 120 | 132 | 144 |

a.

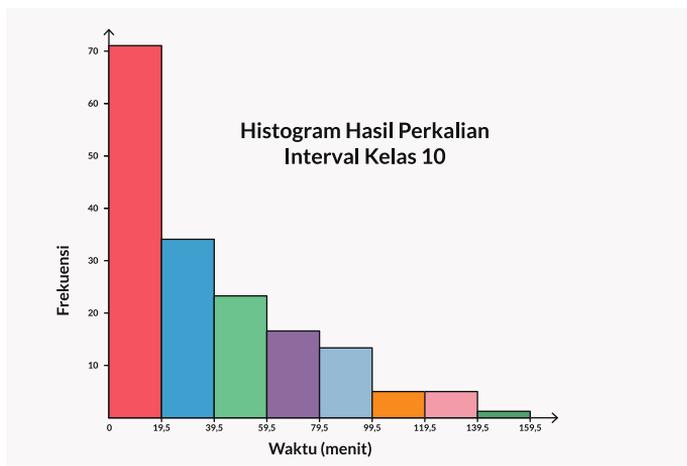
| Kelas | Frekuensi | Kelas | Frekuensi |
|-------|-----------|---------|-----------|
| 0-9 | 48 | 80-9 | 7 |
| 10-19 | 23 | 90-99 | 6 |
| 20-29 | 19 | 100-109 | 3 |
| 30-39 | 15 | 110-119 | 2 |
| 40-49 | 15 | 120-129 | 3 |
| 50-59 | 8 | 130-139 | 2 |
| 60-69 | 9 | 140-149 | 1 |
| 70-79 | 8 | | |

b.



c. Tidak merata. Kelas 0–9 memiliki frekuensi yang terbanyak.

d.



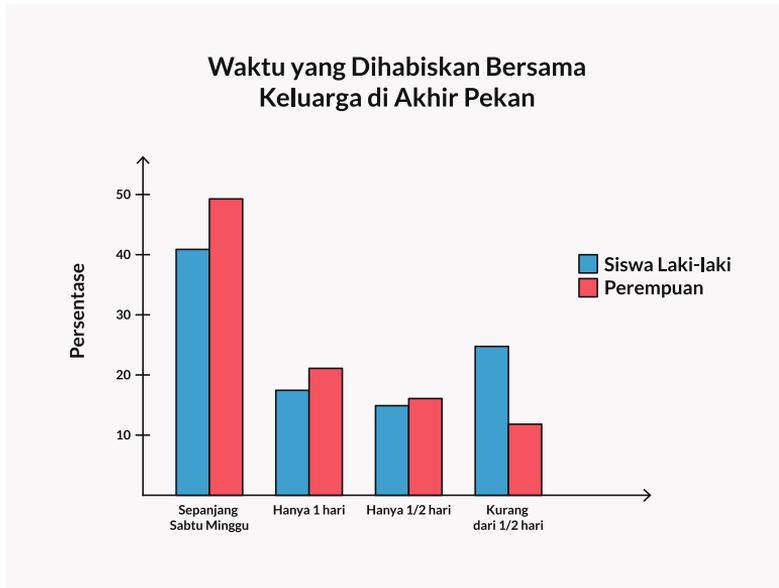
e. Persamaan, kelas terbesar adalah kelas pertama. Kebanyakan data berkumpul di dua kelas yang pertama dan makin ke kanan, frekuensi kelas makin kecil. Kebanyakan data terkumpul di sebelah kiri histogram. Perbedaannya terletak pada lebar kelas dari kedua histogram di atas.



Ayo, Berpikir Kritis

2. a. Karena banyaknya peserta didik laki-laki dan peserta didik perempuan tidak sama, dan kita akan membandingkannya.

b.



- c. Dengan grafik diagram batang ganda, peserta didik dapat melihat perbandingan dua kelompok data dengan lebih baik karena pada kategori yang sama, diagram batang dari kedua kelompok data ditampilkan berdampingan. Misalnya ternyata kelompok peserta didik perempuan lebih banyak di 3 kategori yaitu “sepanjang Sabtu Minggu”, “hanya 1 hari” dan “hanya $\frac{1}{2}$ hari”. Kelompok peserta didik laki-laki hanya lebih banyak di kategori “kurang dari $\frac{1}{2}$ hari”.



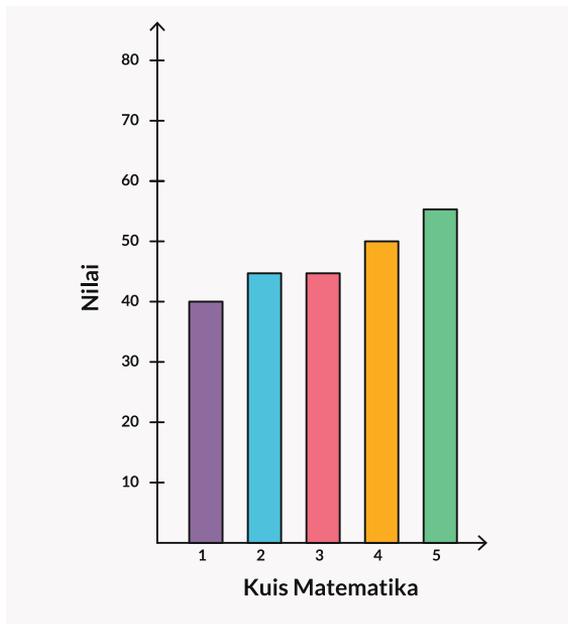
Ayo, Berpikir Kritis

3. a. Nilai kuis pertama Dani adalah 40, dan nilai kuis kelima Dani adalah 55. Jadi, tidak benar kalau nilai kuis ke-5 Dani tiga kali nilai kuis pertamanya.
- b. Pada sumbu y , tidak memiliki skala yang sama. Dari 0 ke 35 digambarkan sangat pendek sehingga tidak memberikan gambaran data yang sesungguhnya.



Penguatan Karakter

- c. Diagram batang yang baru dapat memberikan hasil lebih akurat dan menggambarkan performa Dani yang sebenarnya di kuis Matematika mingguan:



B. Statistik Deskriptif



Kriteria Ketercapaian Tujuan Pembelajaran

- Peserta didik mampu menghitung dan memilih ukuran pemusatan yang tepat: *mean*, modus dan median
- Peserta didik mampu menghitung dan menggunakan ukuran penempatan dalam masalah sehari-hari
- Peserta didik mampu menentukan ukuran penempatan dari kumpulan data: kuartil dan persentil dari data tunggal dan data kelompok.



Sarana & Prasarana Pembelajaran

Kalkulator saintifik

1. Ukuran Pemusatan



Apersepsi

Untuk subbab ini, dapat diawali dengan mengingat kembali topik mencari *mean*, modus, dan median yang pernah dipelajari oleh peserta didik saat di jenjang SMP.

Guru dapat menampilkan data sederhana, misalnya 5, 6, dan 7. Berapa *mean*, median, dan modus dari data ini.

$$\text{Mean} = \frac{5+6+7}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

Median adalah data yang berada tepat di tengah setelah data diurutkan dari yang kecil ke besar, yaitu terletak di data ke-2. Jadi, median = 6.

Modus adalah data yang paling sering muncul. Dari data 5, 6, dan 7, karena masing-masing data hanya muncul $1 \times$, maka tidak memiliki modus.

Selanjutnya guru dapat menambahkan 1 buah data tambahan yaitu 7 sehingga data menjadi 5, 6, 7, 7.

Minta peserta didik menghitung *mean*, median, dan modusnya.

$$\text{Mean} = \frac{5+6+7+7}{4} = \frac{25}{4} = 6,25$$

Untuk Median, karena banyaknya data ada sebanyak genap (4 buah), maka Median terletak di antara data ke-2 dan ke-3. Median = $\frac{6+7}{2} = 6,5$
Modus = 7, karena 7 muncul sebanyak $2 \times$ dan data lain hanya muncul $1 \times$.

Setelah ini para peserta didik akan belajar untuk mencari ukuran pemusatan untuk jumlah data yang lebih banyak.

a. Modus dan Median



Pemanasan

Mulai aktivitas pembelajaran dengan membahas **Ayo, Bereksplorasi**.
Eksplorasi 6.3. Dot Plot.

Ajak peserta didik untuk mengenal sebuah diagram sederhana sehingga dapat membantu peserta didik dalam menemukan ukuran pemusatan dan melihat sebaran data dengan mudah, yaitu *line plot*.

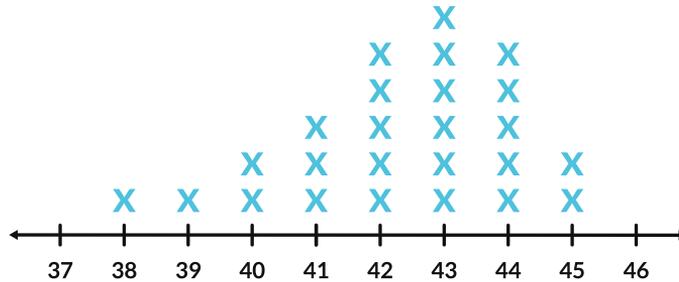
Eksplorasi 6.3 Dot Plot



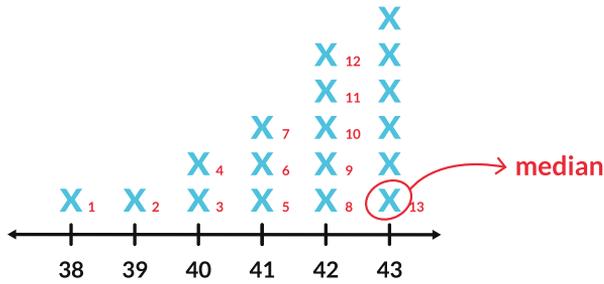
Ayo, Bereksplorasi

Jawaban Eksplorasi 6.3

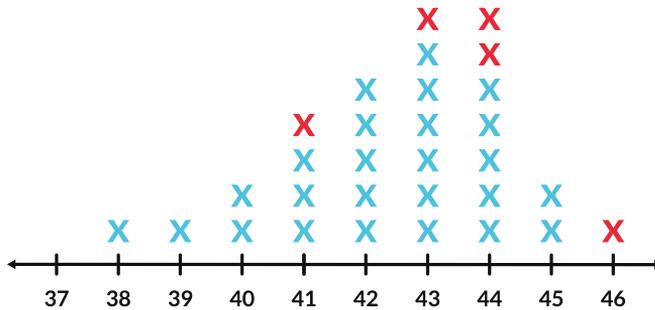
1.



2. Dari *line plot*, terlihat bahwa mayoritas pemain basket di SMA memiliki ukuran sepatu nomor 42 sampai 44. Ukuran lainnya, tetap ada, hanya saja tidak dominan. Hal ini cukup masuk akal melihat usia peserta didik SMA dan tinggi peserta didik pemain basket yang cenderung tinggi.
3. Data terkecil = 38, data terbesar = 45.
4. Pada *line plot*, data terkecil dilihat dari tanda X yang berada di paling kiri, data terbesar terletak di *line plot* yang paling kanan.
5. Jangkauan = $45 - 38 = 7$.
6. Modus = 43, karena muncul terbanyak yaitu sebanyak 6 kali.
7. Dari *line plot*, modus ditemukan yang memiliki tanda X paling tinggi.
8. Banyak data = 25, median terletak di data ke-13, agar di sebelah kiri median ada 12 data dan di sebelah kanan median ada 12 data. Urutkan data dari kecil ke besar, lalu carilah data yang terletak di urutan ke-13, yaitu median = 43.
9. Karena kita sudah mengetahui bahwa median terletak di data ke-13, maka pada *line plot*, hitunglah dari kiri ke kanan, bawah ke atas, tanda X yang berada di urutan ke-13 adalah median. Median = 43.



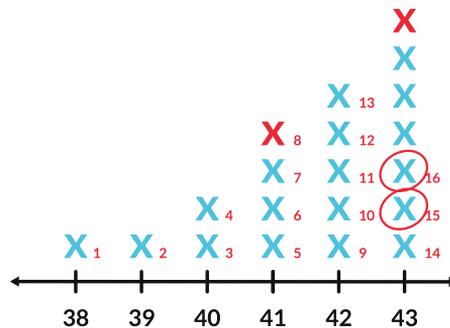
10. Setelah ada penambahan data 41, 43, 44, 44, dan 46, *line plot* berubah menjadi



Jangkauan sekarang = $46 - 38 = 8$

Modus sekarang = 43 dan 44, artinya kelompok data yang baru memiliki 2 modus atau bimodal.

11. Sebelum mencari median yang baru, diskusikan bersama peserta didik jika sebelumnya banyaknya data 25 buah yaitu bilangan ganjil, bagaimana dengan banyak data yang baru yaitu 30 buah? Median terletak di antara data ke-15 dan data ke-16.



Data ke-15 = 43, data ke-16 = 43. Median = 43

Dari diskusi dan **Eksplorasi 6.3**, cobalah meminta peserta didik untuk:

1. Membandingkan median dan modus data lama dengan median dan modus data yang baru. Walaupun terdapat data baru yang nilainya berbeda jauh, yaitu 46 (disebut dengan istilah pencilan), tetapi modus dan median tidak terpengaruh.
2. Melakukan generalisasi urutan median jika banyaknya data ganjil dan banyaknya data genap sampai kelas menemukan generalisasi sebagai berikut:

Untuk mencari letak median, bagilah banyaknya data dengan 2.

- Jika hasilnya adalah bilangan bulat, m , maka median terletak di tengah-tengah di antara urutan ke- m dan ke- $(m + 1)$.
- Jika hasil baginya bukan merupakan bilangan bulat, bulatkanlah hasilnya ke atas, maka median terletak di urutan sesuai hasil pembulatan.

b. Mean (Rerata atau Rata-Rata)

Lalu, kegiatan kelas dapat dilanjutkan dengan melakukan **Eksplorasi 6.4: Mean**.

Eksplorasi 6.4 Mean



Ayo, Bereksplorasi

Pada awal eksplorasi peserta didik dapat diingatkan mengenai istilah *mean* juga sering disebut sebagai rerata atau rata-rata. Ajak peserta didik untuk melihat soal mengenai OSIS yang akan menyumbang para korban bencana. Melalui soal ini, guru dapat mengingatkan pentingnya semangat saling menolong sesama tanpa membeda-bedakan agama, suku, dan ras. Ajak peserta didik untuk menjadi pelopor tindakan kebaikan untuk menginspirasi peserta didik lain.

Urutkan data terlebih dahulu sehingga menjadi seperti ini:

3 3 4 5 5 6 7 8 9 10

1. $Mean = \frac{60}{10} = 6$, median = $\frac{5+6}{2} = 5,5$ dan modus = 5

2. Data baru menjadi:

$$3 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 20 \quad 22$$
$$\text{Mean} = \frac{102}{12} = 8,5, \text{ median} = \frac{6+7}{2} = 6,5 \text{ dan modus} = 5$$

c. Penggunaan Ukuran Pemusatan

Eksplorasi 6.5 Memilih Ukuran Pemusatan



Ayo, Bereksplorasi

Minta peserta didik melakukan pengamatan, ukuran pemusatan mana yang memiliki perubahan paling besar karena adanya tambahan 2 data baru. (Modus dan Median, nilainya cenderung tetap atau tidak terpengaruh dengan data yang ekstrem/pencilan, sedangkan nilai *mean* terpengaruh dengan data pencilan).

Peserta didik akan diberikan data yang sangat ekstrem agar dapat melihat perubahan yang terjadi.

Jika seandainya peserta didik ke-12 bukan menyumbang 22 pakaian, tetapi menyumbang 100 pakaian,

$$3 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 20 \quad 100$$

maka sebelum menghitung ukuran pemusatan yang baru, diskusikan di kelas mengenai ukuran pemusatan manakah yang akan berubah. Peserta didik dengan pemahaman yang baik akan menjawab *mean* akan berubah secara signifikan, sedangkan nilai median dan modus relatif tetap. Minta peserta didik membuktikannya dengan menghitung ukuran pemusatan itu berdasarkan data yang baru.

$$\text{Mean} = \frac{180}{12} = 15, \text{ median} = \frac{6+7}{2} = 6,5 \text{ dan modus} = 5$$

Mean berubah secara signifikan. Median dan modus tidak berubah.

Jadi data yang ekstrem hanya berpengaruh pada mean, tetapi tidak pada median dan modus.

d. Mean (Rata-Rata) Data Kelompok

Peserta didik akan melihat ketika data tunggal dikelompokkan menjadi data kelompok, ukuran pemusatan data tunggal tidak berbeda atau relatif sama dengan data kelompok.

Dari data tunggal pada kegiatan **Eksplorasi 6.3** mengenai penjualan sepatu dengan banyak data = 30 buah, minta peserta didik menghitung *mean* data tunggal terlebih dahulu:

$$\text{Mean} = \frac{38+39+(2 \times 40)+(4 \times 41)+(5 \times 42)+(7 \times 43)+(7 \times 44)+(2 \times 45)+46}{30} = 42,5$$

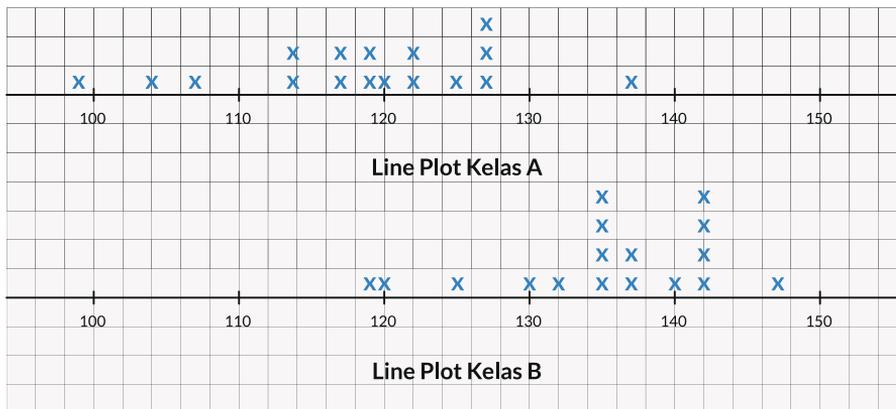
Lalu minta peserta didik membandingkan dengan *mean* data kelompok = 42,6.

Mean data tunggal dengan *mean* data kelompok dapat dikatakan relatif sama, sehingga pengelompokan data tunggal menjadi data kelompok tidak akan mengubah nilai *mean* secara signifikan.

Kunci Jawaban Latihan 6.3

- Modus = 43 dan 44, median = 43, *mean* = 42,5.
 - Karena penjualan sepatu nomor 43 dan 44 sebanyak 14 buah atau hampir 50% dari total penjualan, maka penggunaan modus dalam perencanaan pemesanan sepatu bulan depan sudah tepat.
- Modus = 0, median = 3
 - Penggunaan median lebih baik, karena banyaknya data yang berada di sekitar median (data 2, 3, dan 4) ada sebanyak 8 buah atau mencakup 50% data sehingga median lebih mewakili kumpulan data dibanding modus.
- Banyak kemungkinan jawaban. Salah satu di antaranya adalah:
3, 3, 4, 4, 4, 7, 8, 9, 10, 10, 11, 12, 13
(Guru dapat menambah tantangan, misalnya kumpulan data memiliki bimodal atau data terbesar diubah menjadi 10)

4. a.



- b. *Range* kelas A = $137 - 109 = 28$
Range kelas B = $147 - 119 = 28$
 Modus kelas A = 127, modus kelas B = 135 dan 142
 Median kelas A = 119, median kelas B = 135
- c. Kelas B berasal dari kelas yang lebih tinggi, karena dari data median kelas B = 135, artinya 50% peserta didik kelas B memiliki tinggi badan lebih dari 135 cm. Kelas A yang memiliki median = 119, artinya 50% peserta didik dari kelas A memiliki tinggi badan lebih dari 119. Dari *line plot* juga terlihat sebaran data kelas B lebih tinggi dari sebaran data di kelas A. Secara umum, anak-anak di kelas B lebih tinggi dari anak-anak di kelas A.
- d. Median kelas A = 119. Dari *line plot* kedua kelas terlihat bahwa seluruh peserta didik kelas B memiliki tinggi sama atau lebih tinggi dari 119 cm atau 100% peserta didik kelas B.
5. a. Kelas modus terletak pada kelas 25–27
 b. $Mean = \frac{(4 \times 20) + (17 \times 23) + (25 \times 26) + (14 \times 29)}{60} = \frac{1527}{60} = 25,45$
 c. Kelas median terletak pada kelas 25–27

e. Median dan Kelas Modus Data Kelompok

Eksplorasi 6.6 Membandingkan Modus dan Median Data Tunggal dengan Data Kelompok



Ayo, Bereksplorasi

Setelah peserta didik membandingkan *mean* data tunggal dengan *mean* data kelompok pada subbab sebelumnya yang ternyata hasilnya relatif sama, maka pada subbab ini peserta didik akan diajak untuk melakukan hal yang sama pada ukuran pemusatan lainnya yaitu modus dan median.

Untuk mencari modus dari data kelompok, dibatasi hanya sampai mencari kelas modulusnya saja.

Untuk mencari median data kelompok, akan digunakan prinsip interpolasi. Prinsip interpolasi sendiri sebenarnya secara tidak langsung pernah dipelajari oleh peserta didik saat di SMP pada topik geometri: kesebangunan.

Ajak peserta didik melihat soal kesebangunan sederhana berikut:

Diketahui $\triangle ABC$ dan $\triangle ADE$ saling sebangun artinya

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}$$

Jika diketahui panjang sisi $AD = x$, $AB = 6$, $DE = 3$ dan $BC = 4$, maka diskusikan dengan peserta didik, cara mencari nilai x .

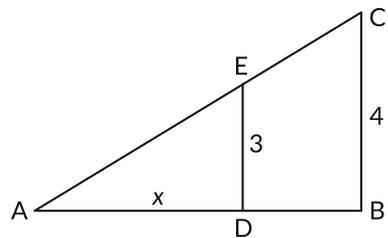
$$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}$$

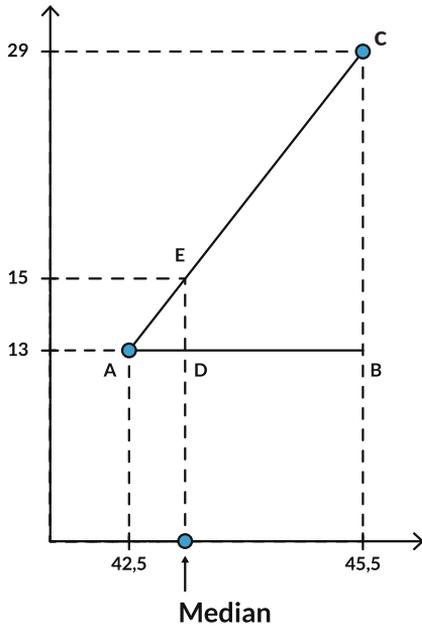
$$\frac{3}{4} = \frac{x}{6}$$

Diperoleh $x = \frac{3}{4} \times 6 = 4,5$

Prinsip kesebangunan ini akan dipakai pada metode interpolasi.

Jika data ke-13 adalah 42,5 dan data ke-29 adalah 45,5 maka tentukanlah data yang terletak di urutan ke-15?





$$\begin{aligned} AD &= \text{median} - 42,5 \\ AB &= 45,5 - 42,5 = 3 \\ DE &= 15 - 13 = 2 \\ BC &= 29 - 13 = 16 \end{aligned}$$

$$\triangle ADE \sim \triangle ABC$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$$

$$\frac{\text{median} - 42,5}{3} = \frac{2}{16}$$

$$\text{median} - 42,5 = \frac{1}{8} \times 3$$

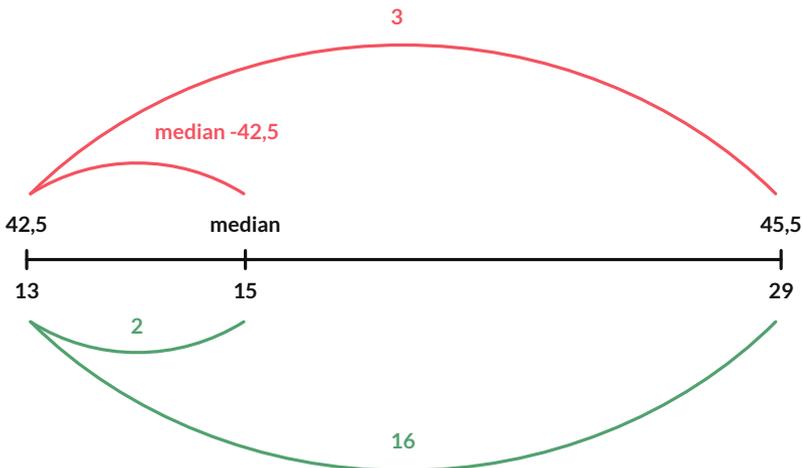
$$\text{median} - 42,5 = 0,375$$

$$\text{median} = 42,875$$

Untuk metode interpolasi sendiri, ajak peserta didik untuk mengaitkan angka-angka pada gambar kesebangunan segitiga di atas menjadi sebagai berikut:



Minta peserta didik membandingkan garis bilangan ini dengan gambar kesebangunan sebelumnya. Perbandingan panjang yang manakah yang sama dengan prinsip kesebangunan di atas?



Jika sebelumnya kita membandingkan “merah pendek” dengan “hijau pendek” dan “merah panjang” dengan “hijau panjang”, bagaimana jika kali ini kita membuat perbandingan dengan mengelompokkan yang berwarna sama. Merah dengan merah, dan hijau dengan hijau?

Apakah masih akan memberikan hasil yang sama?

$$\frac{\text{median} - 42,5}{3} = \frac{2}{16}$$

$$\text{median} - 42,5 = \frac{2}{16} \times 3$$

$$\text{median} = 42,5 + \frac{3}{8}$$

$$\text{median} = 42,875$$

Minta peserta didik membandingkan hasil dari median data kelompok ini dengan median pada data tunggal. Minta mereka memberikan kesimpulan (bahwa ternyata data tunggal yang dikelompokkan tidak mengubah median secara signifikan).

2. Ukuran Penempatan (*Measure of Location*)

Kuartil Data Tunggal



Sarana & Prasarana Pembelajaran

- Kertas kotak-kotak/milimeter blok
- Penggaris
- Kalkulator saintifik



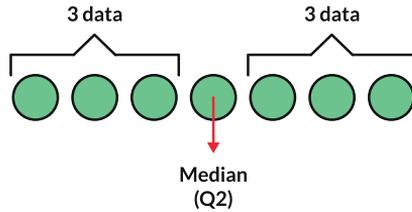
Apersepsi

Pada subbab ini, jika sebelumnya mereka sudah mengenal median yang membagi 2 kelompok data sama besar atau masing-masing 50%, kenalkan istilah kuartil yang berasal dari kata-kata *quarter* atau seperempat. Jadi kuartil akan membagi kumpulan data menjadi 4 bagian yang sama besar.

Berikan peserta didik visualisasi mengenai apa yang dimaksud kuartil pada data tunggal, dimulai dari 7 buah data.

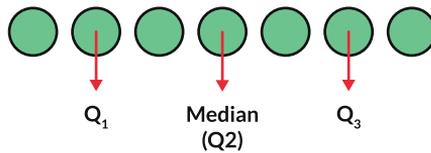


Sesuai dengan pengetahuan awal mengenai median, minta peserta didik menentukan data mana yang menjadi median.



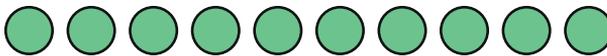
Peserta didik dengan pemahaman yang benar, akan menjawab bahwa median berada di data ke-4, karena ada tepat 3 data di kanan dan kiri median. Gunakan kesempatan ini untuk memperkenalkan bahwa median sama dengan kuartil tengah atau Q_2 .

Minta peserta didik untuk menentukan letak Q_1 dan Q_3 yang tepat membagi dua sama besar 3 data yang ada di kiri dan kanan median.

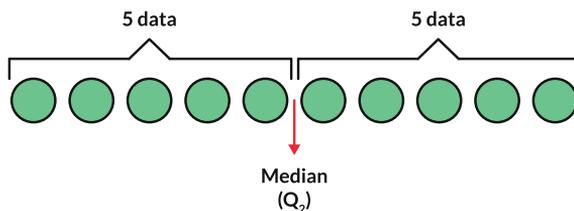


Q_1 terletak di data ke-2 dan Q_3 terletak di data ke-6. Pada visualisasi ini tampak bahwa Q_1 , Q_2 , dan Q_3 membagi data menjadi 4 bagian sama besar.

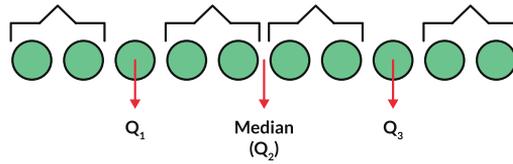
Berikan situasi yang lain, misalnya dengan menambah banyaknya data menjadi 10 data.



Minta mereka menentukan mediannya terlebih dahulu. Karena jumlah data genap, maka Q_2 terletak di antara data ke-5 dan ke-6.



Lalu tentukan juga Q_1 dan Q_3 , agar keseluruhan data terbagi menjadi 4 bagian sama besar. Karena di sebelah kiri dan kanan median terdapat 5 data maka:



Dari visualisasi ini terlihat bahwa Q_1 terletak di data ke-3 dan Q_3 terletak di data ke-8.

Dari 2 percobaan di atas, buatlah tabel agar peserta didik mampu menarik generalisasi.

| Banyak data, n | $\frac{1}{4}n$ | Letak Q_1 | $\frac{1}{2}n$ | Letak Q_2 | $\frac{3}{4}n$ | Letak Q_3 |
|------------------|----------------|-------------|----------------|--------------|----------------|-------------|
| 7 | 1,75 | Data ke-2 | 3,5 | Data ke-4 | 5,25 | Data ke-6 |
| 10 | 2,5 | Data ke-3 | 5 | Antara 5 & 6 | 7,5 | Data ke-8 |

Diskusikan dengan peserta didik, mengapa menggunakan $\frac{1}{4}n$, $\frac{1}{2}n$, dan $\frac{3}{4}n$

Lanjutkan diskusi sampai peserta didik dapat menemukan generalisasi:

Untuk mencari letak kuartil bawah atau Q_1 , bagilah banyaknya data dengan 4.

- Jika hasilnya adalah bilangan bulat, m , maka Q_1 terletak di tengah-tengah antara urutan ke- m dan ke- $(m + 1)$.
- Jika hasil baginya bukan merupakan bilangan bulat, bulatkanlah hasilnya ke atas, maka Q_2 terletak di urutan sesuai hasil pembulatan.

Generalisasi untuk Q_3 :

untuk mencari letak kuartil atas atau Q_3 adalah dengan mengalikan banyaknya data dengan $\frac{3}{4}$.

- Jika hasilnya adalah bilangan bulat, m , maka Q_3 terletak di tengah-tengah antara urutan ke- m dan ke- $(m + 1)$.
- Jika hasil baginya bukan merupakan bilangan bulat, bulatkanlah hasilnya ke atas, maka Q_3 terletak di urutan sesuai hasil pembulatan.

Ajak peserta didik untuk melihat visualisasi dari 20 data pada **Gambar 6.11 dan 6.12**. Lalu, mengujinya dengan generalisasi yang telah mereka temukan sebelumnya.

Karena $\frac{1}{4}n = \frac{1}{4} \times 20 = 5$, maka Q_1 terletak di antara data ke-5 dan ke-6.

Karena $\frac{1}{2}n = \frac{1}{2} \times 20 = 10$, maka Q_2 terletak di antara data ke-10 dan ke-11.

Karena $\frac{3}{4}n = \frac{3}{4} \times 20 = 15$, maka Q_3 terletak di antara data ke-15 dan ke-16.



Ayo, Mencoba

Carilah Q_1 , Q_2 , dan Q_3 dari data penjualan sepatu pada **Tabel 6.6**.

Pada **Tabel 6.6**, banyaknya data yaitu 30 buah, maka:

$\frac{1}{4}n = \frac{1}{4} \times 30 = 7,5$. Q_1 terletak di data ke-8, maka nilai $Q_1 = 41$

$\frac{1}{2}n = \frac{1}{2} \times 30 = 15$. Q_2 terletak di data ke-15 dan ke-16, maka nilai $Q_2 = 43$

$\frac{3}{4}n = \frac{3}{4} \times 30 = 22,5$. Q_3 terletak di data ke 23, maka nilai $Q_3 = 44$

C. Representasi Data Lanjutan



Kriteria Ketercapaian Tujuan Pembelajaran

- Peserta didik mampu menggambar dan menganalisis diagram box-and-whisker
- Peserta didik mampu menggambar dan menganalisis diagram pencar



Sarana & Prasarana Pembelajaran

- Pensil
- Penggaris
- Kertas kotak-kotak/milimeter blok

1. Diagram Box-and-Whisker atau Box Plot



Apersepsi

Subbab ini diawali dengan guru meminta peserta didik melihat **Gambar 6.13** mengenai diagram box-and-whisker penjualan sepatu. Lalu guru meminta peserta didik mengaitkan gambar ini dengan tugas **Ayo, Mencoba** yang baru saja selesai mereka hitung.

Minta beberapa peserta didik untuk menyampaikan temuannya. Guru bisa meminta peserta didik lainnya untuk menanggapi apa yang disampaikan oleh temannya.

Temuan yang diharapkan muncul dari peserta didik:

“Angka 41 pada diagram itu sama dengan nilai kuartil 1 pada **Tabel 6.6**

“Angka 43 pada diagram itu sama dengan nilai median pada **Tabel 6.6**

“Angka 44 pada diagram itu sama dengan nilai kuartil 3 pada **Tabel 6.6**

“Angka 38 pada diagram itu sama dengan nilai data terkecil pada **Tabel 6.6**

Setelah diskusi ini, kenalkan kepada peserta didik mengenai sebuah diagram baru yang bernama box-and-whisker plot. Diagram tersebut menampilkan data terkecil, data terbesar, dan 3 buah kuartil. Tampilkan **Gambar 6.14** pada Buku Siswa. Untuk istilah baru yaitu pencilan, guru dapat menggunakan soal nomor 2 yang ada di **Ayo, Berdiskusi** mengenai perusahaan penyedia layanan internet.

Pada bagian **Ayo, Berdiskusi**, ajak para peserta didik untuk mencoba menggambar diagram box-and-whisker. Minta peserta didik menyampaikan apa yang dimaksud dengan batas atas dan batas bawah pada box-and-whisker plot dan apa kaitannya dengan pencilan. Respons yang diharapkan adalah peserta didik dapat menemukan data yang berada lebih kecil dari batas bawah dan lebih besar dari batas atas. Data itu disebut pencilan atau *outliers*.

Pada bagian c, guru dapat mengembangkan pertanyaan sejenis secara mandiri untuk mengetahui pemahaman peserta didik mengenai diagram box-and-whisker plot ini, misalnya:

Ada berapa persen data yang terletak antara 20 dan 23? (jawaban: 25%)

Ada berapa persen data yang terletak antara 20 dan 24? (jawaban: 50%)

Ada berapa persen data yang terletak antara 23 dan 24? (jawaban: 25%)



Ayo, Mencoba

Kunci Jawaban

1. Pertama urutkan data lebih dahulu dari data terkecil sampai terbesar:
300, 305, 310, 310, 315, 315, 320, 320, 325, 750

Lalu, tentukan ketiga kuartil:

Q_1 terletak di data ke-3, maka $Q_1 = 310$

Q_2 terletak di antara data ke-5 dan 6, maka $Q_2 = 315$

Q_3 terletak di data ke-8, maka $Q_3 = 320$

Untuk menentukan pencilan, kita tentukan dahulu nilai IQR.

$$\text{IQR} = Q_3 - Q_1$$

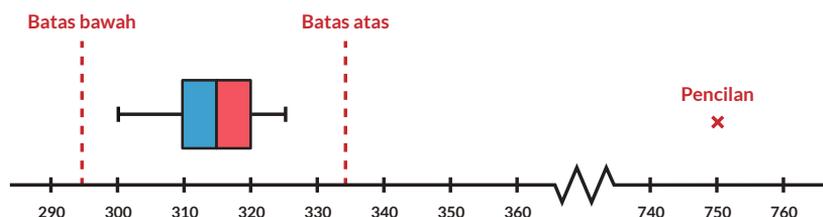
$$\text{IQR} = 320 - 310 = 10$$

Lalu kita tentukan batas bawah dan batas atas:

$$\text{Batas bawah} = Q_1 - 1,5 \times \text{IQR} = 310 - 1,5 \times 10 = 310 - 15 = 295$$

$$\text{Batas atas} = Q_3 + 1,5 \times \text{IQR} = 320 + 1,5 \times 10 = 320 + 15 = 335$$

Lalu, kita gambar box-and-whisker plot sebagai berikut:



2. 750 kWh disebut sebagai pencilan karena berada di luar batas atas 335 kWh.
3. Penyebab dari pencilan tersebut, yang besarnya 2 kali dari kebanyakan penggunaan listrik rumah lainnya dapat disebabkan beberapa hal, antara lain:

- Rumah tangga tersebut lebih besar dan lebih banyak penghuninya sehingga lebih banyak menggunakan perlengkapan listrik, yang akhirnya berdampak pada jumlah kWh yang dipakai.
- Rumah tersebut selain digunakan sebagai tempat tinggal, juga digunakan sebagai tempat usaha sehingga penggunaan listrik di rumah tersebut berlangsung terus-menerus sepanjang waktu.

Perbolehkan peserta didik menggunakan alasan lainnya selama peserta didik dapat menjelaskan alasannya secara logis.

Menggunakan Box Plot Untuk Membandingkan Dua atau Lebih Kelompok Data

Guru dapat membahas bersama peserta didik bagaimana memahami perhitungan penggunaan listrik misalnya melalui contoh yang diberikan yaitu penggunaan bola lampu berukuran 60 Watt selama 1 jam. Guru dapat mengajak para peserta didik untuk menghemat energi listrik yang semakin terbatas dengan cara:

- Membatasi penggunaan listrik
- Memilih perangkat listrik yang hemat listrik

Kemudian guru dapat meminta peserta didik secara berkelompok untuk melengkapi tabel untuk energi turbin angin, sehingga tabel terisi lengkap seperti berikut:

| | Energi Surya | Turbin Angin |
|---------------|--------------|--------------|
| Data minimum | 150 | 140 |
| Q1 | 158 | 142 |
| Q2 | 161 | 144,5 |
| Q3 | 165 | 147 |
| Data maksimum | 170 | 150 |

Kita juga bisa menentukan *range* dan IQR dari masing-masing kelompok:

| | Energi Surya | Turbin Angin |
|--------------|--------------|--------------|
| <i>Range</i> | 20 | 10 |
| IQR | 7 | 5 |

Tampilkan gambar 2 buah box plot di papan tulis dan minta peserta didik menyampaikan pendapatnya apa yang mereka temukan dari kedua gambar box plot ini. Beberapa contoh analisis di Buku Siswa bertujuan untuk membantu peserta didik.

Guru dapat meminta peserta didik menambahkan analisis lain yang mereka temukan dan menyampaikannya di depan kelas, agar menginspirasi peserta didik lain.

Setelah bagian ini, guru dapat mengajak peserta didik ke bagian **Ayo, Berpikir Kritis** untuk menentukan energi alternatif mana yang sebaiknya dipilih. Jelaskan alasannya dan minta peserta didik memperhatikan kekhasan daerah mereka.



Ayo, Mencoba

Kunci Jawaban

Untuk menemukan median dari setiap rumah, mari kita urutkan data secara berurutan terlebih dahulu:

Rumah A (Energi Surya): 310, 315, 317, 319, 320, 320, 321, 322, 325, 328

Rumah B (Energi Hidro): 300, 301, 302, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 310

Untuk mencari median, kita lihat nilai tengah dari setiap data yang telah diurutkan:

Median dari Rumah A (Energi Surya):

$$\text{Median} = (\text{nilai ke-5} + \text{nilai ke-6}) / 2$$

$$\text{Median} = (320 + 320) / 2$$

$$\text{Median} = 320$$

Median dari Rumah B (Energi Hidro):

$$\text{Median} = (\text{nilai ke-5} + \text{nilai ke-6}) / 2$$

$$\text{Median} = (305 + 306) / 2$$

$$\text{Median} = 305.5$$

Jadi, rumah yang memiliki konsumsi energi median yang lebih tinggi adalah Rumah A (Energi Surya) dengan median 320.

Untuk mengukur konsistensi data, mari kita temukan rentang interkuartil (IQR) dari setiap rumah. IQR dihitung sebagai perbedaan antara kuartil ketiga (Q3) dan kuartil pertama (Q1).

Mencari IQR Rumah A (Energi Surya):

$$Q1 = 317, Q3 = 322$$

$$\text{IQR Rumah A} = Q3 - Q1 = 322 - 317 = 5$$

Mencari IQR Rumah B (Energi Hidro):

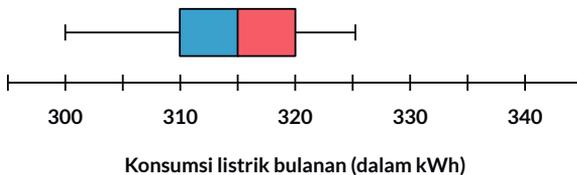
$$Q1 = 302, Q3 = 308$$

$$\text{IQR Rumah B} = Q3 - Q1 = 308 - 302 = 6$$

Dari perhitungan tersebut, dapat disimpulkan bahwa konsumsi energi yang lebih konsisten dimiliki oleh Rumah A (Energi Surya) karena memiliki rentang interkuartil (IQR) yang lebih rendah (5 dibandingkan dengan 6 untuk Rumah B).

Kunci Jawaban Latihan 6.4

1. a. Data minimum = 68, data maksimum = 77, $Q_1 = 71$, $Q_2 = 72$ dan $Q_3 = 76$
b. Jawaban bisa sangat beragam, salah satu contoh jawaban adalah:
68, 68, 71, 71, 72, 72, 72, 76, 77, 77
2. a. Setelah data diurutkan diperoleh:
 $Q_1 = 310$, $Q_2 = 315$, $Q_3 = 320$
data terbesar = 325
data terkecil = 300
sehingga diperoleh diagram box plot sebagai berikut

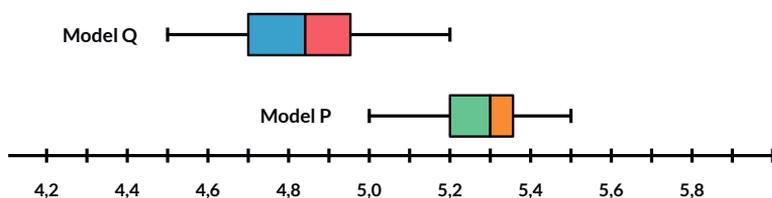


- b. Untuk menentukan pencilan, perlu dicari nilai IQR, batas bawah, dan batas atas. $\text{IQR} = 10$, batas bawah = 295, dan batas atas = 335
data 750 kWh lebih besar dari batas atas atau $750 > 335$, maka data 750 kWh merupakan pencilan.
- c. Kemungkinan munculnya pencilan pada konsumsi listrik bulanan:

- ukuran rumah tersebut berbeda dengan rumah lainnya sehingga memerlukan perangkat elektronik yang lebih banyak
 - kesalahan pencatatan meteran listrik
3. Untuk mengetahui model mana yang umumnya memerlukan waktu lebih sedikit untuk pelatihan dan model mana yang memiliki rentang waktu pelatihan yang lebih seragam, diperlukan Box and Whisker plots dari kedua kumpulan data tersebut.

Model P: data minimum = 5,0; Q1 = 5,2; Q2 = 5,3; Q3 = 5,35; data maksimum: 5,5

Model Q: data minimum = 4,5; Q1 = 4,7; Q2 = 4,85; Q3 = 4,95; data maksimum: 5,2



Interpretasi:

- Model yang umumnya memerlukan waktu lebih sedikit untuk pelatihan adalah Model Q, terlihat dari Median model Q = 4,85 lebih kecil dari median model P = 5,3. Kemudian model Q memiliki nilai minimum yang lebih rendah, 4,5 lebih kecil dari 5,0 pada Model P, yang menunjukkan bahwa secara umum Model Q cenderung memerlukan waktu lebih sedikit untuk pelatihan.
 - Rentang waktu pelatihan yang lebih seragam dimiliki oleh Model P. Meskipun Model Q memiliki waktu pelatihan minimum yang lebih rendah, Model P memiliki rentang yang lebih kecil antara nilai minimum dan maksimum (5,0 hingga 5,5) dibandingkan dengan Model Q (4,5 hingga 5,2), menunjukkan tingkat konsistensi yang lebih tinggi dalam waktu pelatihan. Peserta didik juga dapat menggunakan nilai IQR dari kedua model.
4. a. Clara memiliki median yang paling tinggi yaitu 79,5 menit
 b. Troy, karena memiliki median = 70 menit
 c. Clara, waktu belajar terlamanya = 100 menit
 d. Budi, yaitu memiliki range sebesar $80 - 40 = 40$ menit

- e. Clara, waktu belajar terendahnya = 50 menit
- f. Tidak ada, peserta didik terlama adalah Clara, yaitu 100 menit

2. Diagram Pencar (Scatter Plot)



Apersepsi

Bagian ini diawali dengan guru meminta peserta didik mengamati **Tabel 6.8** dan **Gambar 6.19** mengenai diagram pencar. Guru bertanya kepada peserta didik tentang bagaimana menggambar diagram pencar menggunakan data pada **Tabel 6.8**.

Beberapa respons yang diharapkan muncul dari peserta didik:

- Angka-angka pada sumbu x menunjukkan banyaknya buku yang dibaca, sedangkan angka-angka pada sumbu y menunjukkan nilai ulangan Bahasa Indonesia
- Titik yang paling kiri menunjukkan jumlah buku yang dibaca sebanyak 0 buku dan nilai ulangan Bahasa Indonesia = 50
- Titik yang paling kanan menunjukkan jumlah buku yang dibaca sebanyak 7 buku dan nilai ulangan Bahasa Indonesia = 85

Dari contoh ini, guru dapat mengenalkan istilah korelasi, yang dijelaskan secara detail pada bagian **Ayo, Berpikir Kritis**. Hal yang perlu ditekankan pada bagian ini, jika pada suatu kasus terdapat korelasi yang positif belum tentu terjadi hubungan sebab akibat. Untuk mengetahui apakah ada hubungan sebab akibat antara x dan y diperlukan data yang lebih detail, seperti jenis buku yang dibaca, apakah isinya sesuai dengan yang diujikan di ulangan Bahasa Indonesia, atau apakah sebenarnya ada faktor lain yang memengaruhi nilai ulangan Bahasa Indonesia selain jumlah buku yang dibaca.

Untuk korelasi, peserta didik boleh membalik kedua kelompok data. Misalnya nilai ulangan Bahasa Indonesia pada sumbu x dan banyaknya buku yang dibaca pada sumbu y . Hal ini tidak akan mengubah korelasi dengan korelasi semula.

Jika akhirnya kita mengetahui bahwa akibat dari jumlah banyaknya buku yang dibaca ternyata mengakibatkan hasil ulangan Bahasa Indonesia menjadi bagus atau kurang, kita dapat menyebut jumlah buku yang dibaca itu sebagai variabel bebas, sedangkan nilai ulangan Bahasa Indonesia sebagai variabel terikat. Dia disebut variabel terikat karena nilainya yang dipengaruhi oleh variabel terikat. Untuk hubungan sebab akibat ini, kita tidak boleh menukar posisi sumbu x dan sumbu y . Sumbu x selalu untuk variabel bebas dan sumbu y selalu untuk variabel terikat.

Untuk kasus Nakula, minta peserta didik menyampaikan kemungkinan alasan-alasan kenapa nilai Nakula hanya di kisaran 40 sampai 45, walaupun jumlah buku yang dibaca oleh Nakula sama dengan Bima. Respons peserta didik yang diharapkan:

- Jenis buku yang dibaca Nakula kemungkinan berbeda dengan jenis buku yang dibaca Bima. Hanya sama secara jumlah buku saja.
- Saat membaca buku, Nakula kurang bisa mengaitkan materi yang ia baca dengan pertanyaan-pertanyaan yang ada di soal ulangan Bahasa Indonesia, sehingga ia tetap memperoleh hasil yang kurang.
- Terima respons peserta didik lain yang mengaitkan, kapan Bima dan Nakula membaca buku dibanding waktu ulangan Bahasa Indonesia, dan berbagai respons peserta didik lainnya.

Setelah selesai dengan kasus Nakula, guru dapat menampilkan **Gambar 6.20** pada Buku Siswa mengenai berbagai jenis korelasi. Minta peserta didik mengamati ke-4 gambar korelasi tersebut.

Beberapa pertanyaan yang dapat disampaikan guru saat menampilkan gambar ini, antara lain:

- Pada contoh kasus Bima, kamu telah melihat apa yang disebut sebagai korelasi positif. Maka menurutmu, gambar manakah yang memiliki korelasi negatif? **(b dan d, korelasi negatif artinya ketika variabel yang satu membesar, maka variabel lainnya mengecil)**
- Apa persamaan dan perbedaan antara a dan c? **(baik a dan c sama-sama menunjukkan korelasi positif, hanya saja a memiliki korelasi positif yang kuat, sedangkan c memiliki korelasi positif sedang.)**

- Apa persamaan dan perbedaan antara b dan d? **(baik b dan d sama-sama menunjukkan korelasi negatif, hanya saja b memiliki korelasi negatif yang kuat, sedangkan c memiliki korelasi negatif sedang)**

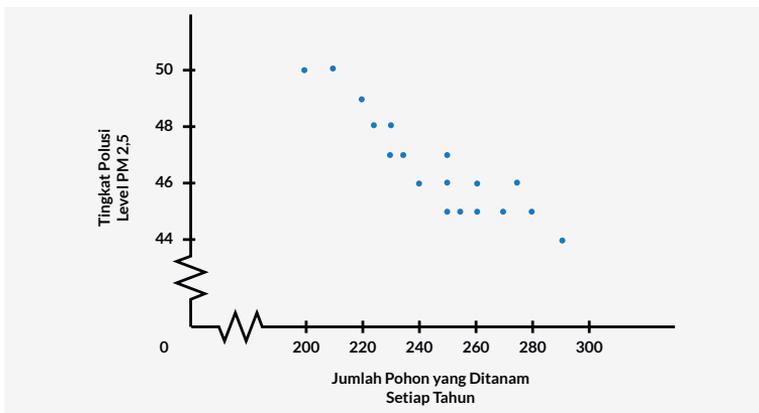
Untuk menentukan kuat, sedang, kurang atau tidak ada korelasi antar 2 variabel pada diagram pencar dilihat pada kepadatan titik-titik yang tergambar. Penjelasan mengenai hal ini juga tertulis di Buku Siswa.



Ayo, Mencoba

Kunci Jawaban

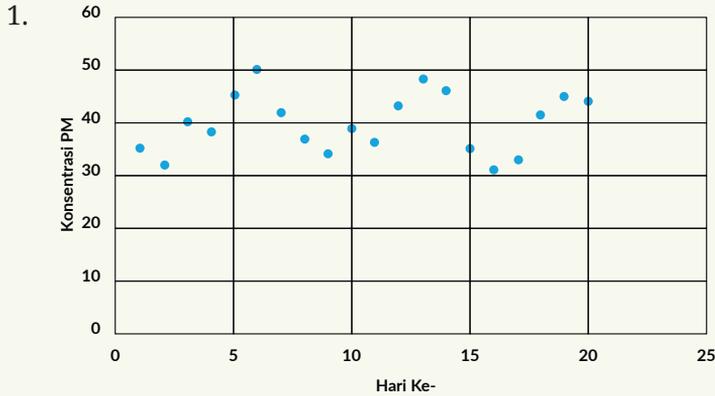
1. Saat akan menggambar diagram pencar, agar gambar yang dihasilkan memiliki proporsional yang baik, maka para peserta didik perlu menuliskan angka-angka pada sumbu x dengan jarak dan interval yang sama, misalnya berjarak 2 ruas untuk setiap interval = 20 seperti terlihat pada gambar berikut. Begitu juga dengan sumbu y , harus memiliki jarak dan interval yang sama, misalnya berjarak 2 ruas untuk setiap interval = 2. Ketika data-data yang ada berjarak terlalu jauh ke pusat koordinat (0, 0) maka agar interval tidak berubah, peserta didik dapat menggambar garis zig-zag dengan maksud memberitahukan bahwa ada bagian garis yang tidak digambar secara utuh untuk menghemat ruang.



2. Jenis korelasinya adalah korelasi negatif kuat, karena titik-titik ini terletak cukup rapat dan saling berdekatan dan ketika satu variabel bertambah (jumlah pohon), maka variabel lain berkurang (tingkat polusi).

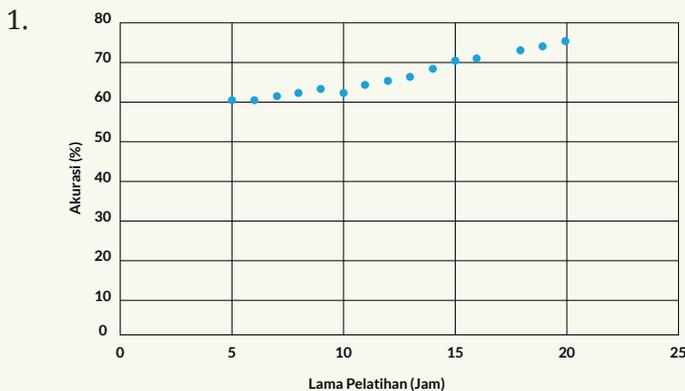


Kunci Jawaban

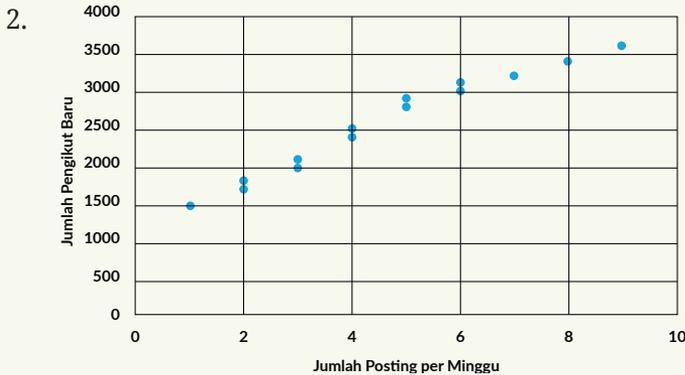


2. Dari diagram pencar yang dihasilkan, tidak terlihat korelasi yang konsisten, apakah itu korelasi positif maupun korelasi negatif selama 20 hari pengukuran konsentrasi PM_{2.5}. Jika seandainya data yang kita miliki, maka kita lebih dapat memberikan hasil analisis yang lebih baik, misalnya tingkat konsentrasi PM_{2.5} yang rendah selalu terjadi pada hari Sabtu dan Minggu, ketika aktivitas masyarakat dan pabrik lebih rendah dibanding hari kerja.
3. Dari data tingkat konsentrasi PM_{2.5} selama 20 hari menunjukkan semua hari masih memiliki tingkat konsentrasi di bawah 55 $\mu\text{g}/\text{m}^3$. Artinya pemerintah belum perlu melakukan tindakan pengurangan polusi udara di kota tersebut.
4. Jawaban bisa bervariasi

Kunci Jawaban Latihan 6.5



Dari diagram pencar, kita melihat bahwa korelasi antara lama pelatihan dan akurasi model yang terjadi adalah korelasi positif kuat, yaitu ketika lamanya pelatihan bertambah banyak, persentase akurasi model juga makin meningkat.



Dari diagram pencar yang telah digambar, terlihat bahwa korelasi antara jumlah posting per minggu dengan jumlah pengikut baru memiliki korelasi positif kuat. Artinya makin banyak seorang selebriti membuat postingan baru, maka makin banyak jumlah pengikut baru yang ia peroleh. Pada diagram pencar dapat dilihat, ketika jumlah posting per minggu membesar, maka jumlah pengikut baru juga membesar. Ada kemungkinan kedua variabel ini memiliki hubungan sebab akibat dengan jumlah posting per minggu sebagai variabel bebas yang memengaruhi jumlah pengikut baru sebagai variabel terikat.

Kunci Jawaban

Uji Kompetensi

- grafik iii
 - grafik iv
 - grafik ii
 - grafik i
- 113
 - Jono salah mengartikan *line plot*. Tanda X menunjukkan banyaknya keluarga yang memiliki jumlah anggota yang terdaftar pada sumbu x . Di atas angka 8 hanya ada 1 X, artinya hanya keluarga Jono saja yang memiliki anggota keluarga sebanyak 8 orang.
- mean* dari 4 ulangan = 80; *median* dari 4 ulangan = 80
 - memilih median, karena jika nilai ulangan ke-5 nya kurang baik dan berada di bawah 70, misalnya menjadi terendah maka median bergeser sedikit ke 79, tidak berubah signifikan.

- c. memilih *mean*, karena jika nilai ulangan ke-5 nya baik, misalnya menjadi yang tertinggi, maka rata-ratanya akan naik menjadi lebih tinggi dari 80.
4. 69,2
5. a. $Q_1 = 1$, 25% peserta didik memiliki hari absen kurang dari 1 hari.
 b. Jangkauan Interkuartil = $Q_3 - Q_1 = 2 - 1 = 1$
 c. 1,51
6. a. *mean* = 46,75
 b. $Q_1 = 40,9$; $Q_3 = 54$; Jangkauan Interkuartil = 13,1
 c. Varian = 102,44; simpangan baku = 10,12

Pengayaan

Kuartil Data Kelompok

Setelah menguasai bagaimana mencari kuartil data tunggal, maka peserta didik lanjut dengan subbab mencari kuartil untuk data kelompok. Sama dengan mencari median pada data kelompok, kita juga akan menggunakan interpolasi.

Sebelum melakukan interpolasi, sama seperti pada data tunggal, peserta didik perlu mencari dahulu letak masing-masing kuartil. Hanya saja di data kelompok, peserta didik tidak dapat menggunakan generalisasi data tunggal.

Lakukan diskusi dengan contoh yang terdapat di Buku Siswa yang mengambil data dari **Tabel 6.6**.



Ayo, Mencoba

Kunci Jawaban

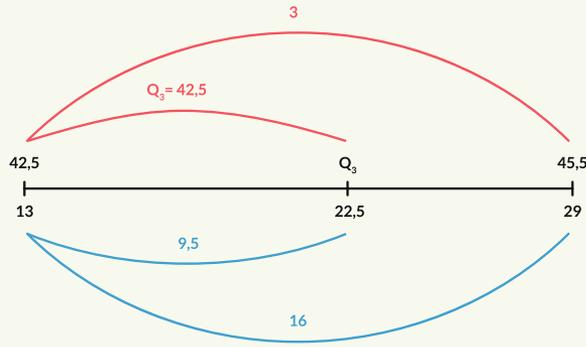
Q_3 terletak pada data ke $\frac{3}{4} \times 30 = 22,5$

Data ke-22,5 terletak pada kelas 43–45.

Tepi bawah kelas 43–45 adalah 42,5 yang merupakan data ke-13.

Tepi atas kelas 43–45 adalah 45,5 yang merupakan data ke-29.

Gambarlah garis bilangan untuk mencari Q_3 dengan interpolasi.



Bandingkan “merah” dengan “merah” dan “biru” dengan “biru”, sehingga terbentuk perbandingan sebagai berikut

$$\frac{Q_3 - 42,5}{3} = \frac{9,5}{16}$$

$$Q_3 - 42,5 = \frac{9,5}{16} \times 3$$

$$Q_3 - 42,5 = 1,78$$

$$Q_3 = 44,28$$

Q_3 dari data tunggal adalah 44. Artinya Q_3 data tunggal dan Q_3 data kelompok tidak berbeda signifikan.

Persentil Data Kelompok

Peserta didik akan mempelajari mengenai ukuran lokasi lainnya yaitu persentil. Jika kuartil membagi data menjadi 4 bagian sama besar, maka persentil, sesuai dengan asal katanya, persen atau per seratus, akan membagi data menjadi 100 bagian sama besar.

Tekankan kepada peserta didik bahwa tidak ada rumus atau generalisasi yang baru, baik untuk data tunggal maupun data kelompok. Perbedaannya hanya jika sebelumnya membagi data menjadi 4, maka pada persentil membagi data menjadi 100.

Gunakan contoh soal di Buku Siswa untuk mencari Persentil ke-65 atau P_{65} .

Kunci Jawaban Latihan 6.6

1. a. Median = 190 b. $Q_1 = 145,5$ $Q_3 = 279,5$
tidak perlu melakukan interpolasi, karena data yang diberikan adalah data tunggal.
2. a. Median = 432 kg.
- b. $Q_1 = 389,08$ kg, perlu menggunakan interpolasi karena data merupakan data kelompok.

3. a. $Q_1 = 175,64$ cm ; $Q_3 = 183$ cm.
- b. $P_{80} = 183,89$ cm artinya 20% pohon memiliki panjang bentang sayap minimal 184,6 cm.
- c. Karena P_{90} terletak di kelas “Lebih dari 186” yang tidak memiliki tepi atas.

Ukuran Penyebaran

1. Jangkauan Interkuartil

Setelah peserta didik menguasai ukuran pemusatan dan ukuran penempatan, maka pada bagian E ini, peserta didik akan mempelajari ukuran penyebaran yang juga sangat penting ketika peserta didik ingin mendapatkan kesimpulan yang lebih jelas dari suatu kelompok data.

Peserta didik diberikan 2 kelompok data tentang umur, yang ternyata kedua kelompok ini memiliki rata-rata yang sama, yaitu 16. Pertanyaan pemantik, manakah kelompok yang mewakili peserta didik dan mana yang mewakili orang tua dan anak kecil? Pertanyaan ini bertujuan untuk memunculkan kesadaran bahwa $mean = 16$, belum tentu menunjukkan bahwa kelompok data berusia sekitar 16 tahun, tetapi tergantung pula dari ukuran penyebaran.

Peserta didik akan menghitung 3 macam ukuran pengukuran yaitu jangkauan interkuartil, varian, dan simpangan baku.

Pemberian kelompok ketiga dengan semua anggota data bernilai 16, merupakan kelompok data yang juga memiliki rata-rata 16, tetapi memiliki ukuran penyebaran = 0, baik pada jangkauan interkuartil, varian, maupun simpangan baku.

Eksplorasi 6.7 dan **Eksplorasi 6.8** ini bertujuan agar peserta didik melihat pengaruh besar kecilnya ukuran penyebaran terhadap keragaman data.



Ayo, Mencoba

Kunci Jawaban

1. Anggota kelompok kedua: 1, 3, 4, 5, 7, 8, 12, 27, 28, 29, 32, 36

$$\begin{aligned}\sum x &= 1 + 3 + 4 + 5 + 7 + 8 + 12 + 27 + 28 + 29 + 32 + 36 \\ &= 192\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum x^2 &= 1^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 7^2 + 8^2 + 12^2 + 27^2 + 28^2 + 29^2 + 32^2 + 36^2 \\ &= 4982\end{aligned}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2 = \frac{4982}{12} - \left(\frac{192}{12}\right)^2 = 415,2 - (16)^2 = 159,2$$

Terbukti bahwa rumus kedua memberikan hasil varian yang sama dengan cara pertama.

2. Untuk kelompok ketiga yang beranggotakan 12 orang dan semuanya berusia 16 tahun, maka $mean = 16$ dan nilai varian dan simpangan bakunya = 0.

2. Varian dan Simpangan Baku Data Tunggal



Ayo, Mencoba

Kunci Jawaban

1. Dari 12 data pada kelompok 2, diperoleh

$$\sum x = 192 \qquad n = 12$$

$$\sum x^2 = 4982$$

maka nilai dari varian:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2 \\ &= \frac{4982}{12} - \left(\frac{192}{12}\right)^2 \\ &= 159,2\end{aligned}$$

2. Dapat, karena semua data sama yaitu 16
maka:
mean = 16
varian = 0

simpangan baku = 0

artinya tidak ada data yang berbeda dengan rata-rata kelompok tersebut

3. Varian dan Simpangan Baku Data Kelompok

Kunci Jawaban Latihan 6.7

1. Varian = 4,69; simpangan baku = 2,17
2. a. Rata-rata = 37,13
b. Simpangan baku = 0,86
3. a. mean = 3
b. varian = 0,75
c. simpangan baku = 0,87
4. *mean* gabungan = 5,44; simpangan baku gabungan = 2,35
5. a. *mean* kelompok A = 63,4; *mean* kelompok B = 60,2
b. Guru dari kelas A terlihat lebih baik karena memiliki *mean* yang lebih tinggi. Selain *mean* yang lebih tinggi, ada 29 peserta didik di kelas A yang nilainya di atas 60. Di kelas B hanya sebanyak 24 peserta didik yang nilainya di atas 60.

Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Republik Indonesia, 2023

**Panduan Guru Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas X
(Edisi Revisi)**

Penulis: Dicky Susanto, dkk.
ISBN: 978-623-118-562-4

Bab

7

Panduan Khusus

Peluang

? Bagaimana kamu dapat memprediksi kemungkinan terjadinya sebuah peristiwa dengan menggunakan matematika?

Pendahuluan

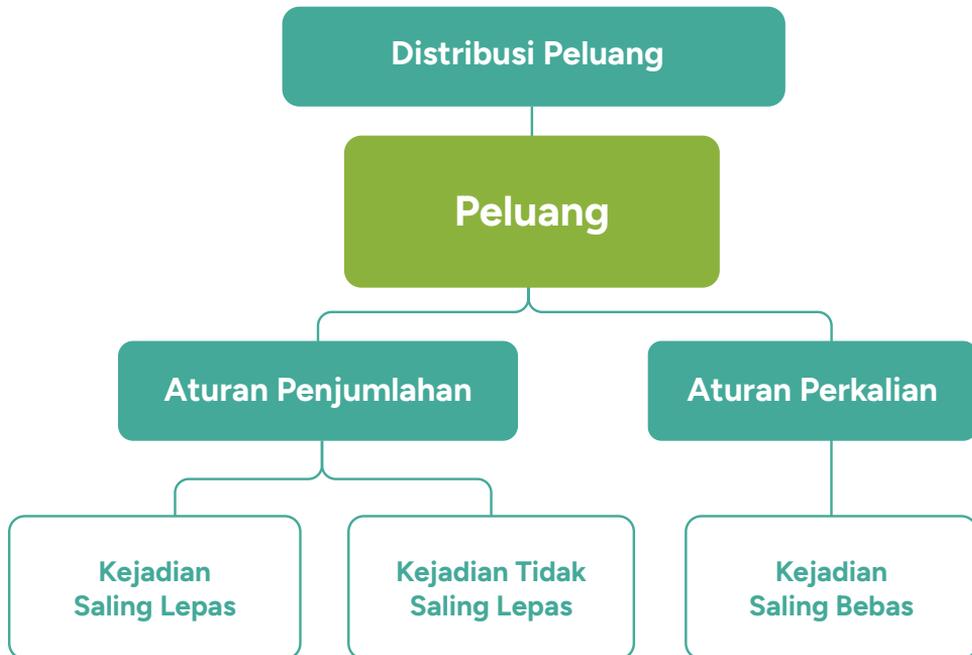
Setelah mempelajari bab ini, peserta didik diharapkan dapat menentukan ruang sampel dan distribusi peluang kejadian, membedakan antara frekuensi relatif dan frekuensi harapan, menggunakan frekuensi harapan untuk memprediksi peluang suatu kejadian, membedakan antara kejadian saling lepas dan kejadian tidak saling lepas, menggunakan aturan penjumlahan untuk menentukan peluang dua kejadian saling lepas, memodifikasi aturan penjumlahan untuk menentukan peluang dua kejadian tidak saling lepas.

Untuk memastikan bahwa tujuan pembelajaran telah tercapai, beberapa kriteria berikut dapat digunakan:

- Peserta didik mampu menentukan ruang sampel sebuah kejadian
- Peserta didik mampu membuat distribusi peluang kejadian
- Peserta didik mampu membedakan antara frekuensi relatif dan frekuensi harapan
- Peserta didik mampu menggunakan frekuensi harapan untuk memprediksi peluang suatu kejadian
- Peserta didik mampu membedakan antara kejadian saling lepas dan kejadian tidak saling lepas
- Peserta didik mampu menggunakan aturan penjumlahan untuk menentukan peluang dua kejadian saling lepas
- Peserta didik mampu memodifikasi aturan penjumlahan untuk menentukan peluang dua kejadian tidak saling lepas.
- Peserta didik mampu membedakan kejadian saling bebas dan kejadian tidak saling bebas.
- Peserta didik mampu menggunakan aturan perkalian untuk menentukan peluang dua kejadian saling bebas.

Pemahaman peluang dalam bab ini berkaitan dengan bab Statistika yang mana peluang dari berbagai kemungkinan hasil dari data yang sudah dikumpulkan dari sampel populasi dapat digunakan untuk membuat kesimpulan dan prediksi mengenai populasi. Peluang dapat juga digunakan dalam bidang genetika (mata pelajaran biologi) untuk menentukan berbagai kemungkinan dari karakteristik yang diturunkan melalui gen.

Peta Materi



Bab ini disarankan diselesaikan dalam 15 JP, namun guru dapat menyesuaikan dengan kondisi satuan pendidikan setempat dengan memperhitungkan keragaman kondisi, potensi, kemampuan individu peserta didik dan dinamika kelas.

Konsep dan Keterampilan Prasyarat

Untuk mempelajari bab ini, peserta didik diharapkan sudah menguasai konsep dasar pecahan dan operasinya, yang sudah dipelajari pada jenjang sebelumnya. Peserta didik mungkin perlu diingatkan kembali bagaimana melakukan operasi dengan pecahan, termasuk menentukan pecahan senilai.

Penyajian Materi Esensial

Pada subbab A, peserta didik melakukan eksplorasi melempar dua dadu dengan warna berbeda dan menentukan ruang sampelnya dalam bentuk tabel. Dari tabel, mereka dapat menentukan apakah semua hasil memiliki peluang yang sama (seragam). Berdasarkan ruang sampel, peserta didik kemudian dapat membuat tabel distribusi peluang yang menunjukkan semua kemungkinan hasil dan peluangnya.

Pada subbab B, peserta didik kemudian dapat menggunakan distribusi peluang untuk menemukan aturan penjumlahan untuk dua kejadian saling lepas dan saling tidak lepas melalui Eksplorasi 7.2.

Pada subbab C, peserta didik memodifikasi aturan penjumlahan untuk menentukan peluang dua kejadian tidak saling lepas. Setelah itu, mereka melakukan eksplorasi untuk menentukan peluang dua kejadian saling bebas.

Apersepsi

Perkenalkan bab ini dengan menanyakan peserta didik kapan konsep peluang muncul di dalam kehidupan mereka sehari-hari. Setelah itu sampaikan pertanyaan pemantik misalnya, bagaimana kalian dapat menentukan peluang dari dua kejadian acak yang terkait seperti melempar dua dadu? Dalam kondisi apa kalian dapat menjumlahkan masing-masing peluang kejadian untuk menentukan peluang dari kejadian yang berhubungan? dan beri tahu peserta didik bahwa mereka akan memikirkan dan mencoba mendapatkan jawaban terhadap pertanyaan ini selama pembelajaran bab mengenai peluang.

Penilaian Sebelum Pembelajaran

Gunakan bagian **Ayo, Mengingat Kembali** mengenai peluang sederhana yang sudah dipelajari di SMP. Pertanyaan-pertanyaan berikut dapat digunakan untuk mengaktifkan prapengetahuan peserta didik.

- Ada berapa kemungkinan hasil melempar sebuah dadu normal (6 sisi)?
- Berapa peluang mendapatkan angka 1 dari melempar sebuah dadu?
- Berapa peluang mendapatkan angka 7?

- Berapa peluang mendapatkan salah satu angka dari 1 sampai 6?
- Berapa peluang mendapatkan angka ganjil, angka genap, dan bilangan prima?

Panduan Pembelajaran

A. Distribusi Peluang



Kriteria Ketercapaian Tujuan Pembelajaran

- Peserta didik mampu menentukan ruang sampel sebuah kejadian.
- Peserta didik mampu membuat distribusi peluang kejadian.



Sarana & Prasarana Pembelajaran

- 2 buah dadu dengan warna yang berbeda jika memungkinkan.
- Uang logam (100, 200, 500, atau 1.000 rupiah).



Pemanasan

Mulai aktivitas pembelajaran dengan jenis-jenis permainan papan apa yang disukai atau pernah dimainkan oleh peserta didik. Kemudian minta peserta didik melakukan **Eksplorasi 7.1**. Mereka dapat menggunakan dadu jika tersedia atau teknologi <https://buku.kemdikbud.go.id/s/tkbath> jika tersedia akses daring. Peserta didik dapat melakukan eksplorasi sendiri-sendiri terlebih dahulu kemudian baru diskusi secara berpasangan atau dalam kelompok, atau langsung bekerja sama berpasangan atau di dalam kelompok.

1. Berikut ini tabel yang sudah dilengkapi.

Angka pada Dadu Putih

| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-----------------------|---|------|------|------|------|------|------|
| Angka pada Dadu Merah | 1 | 1, 1 | 1, 2 | 1, 3 | 1, 4 | 1, 5 | 1, 6 |
| | 2 | 2, 1 | 2, 2 | 2, 3 | 2, 4 | 2, 5 | 2, 6 |
| | 3 | 3, 1 | 3, 2 | 3, 3 | 3, 4 | 3, 5 | 3, 6 |
| | 4 | 4, 1 | 4, 2 | 4, 3 | 4, 4 | 4, 5 | 4, 6 |
| | 5 | 5, 1 | 5, 2 | 5, 3 | 5, 4 | 5, 5 | 5, 6 |
| | 6 | 6, 1 | 6, 2 | 6, 3 | 6, 4 | 6, 5 | 6, 6 |



Ayo, Berdiskusi

Apa arti 3, 2? Apakah berbeda dengan 2, 3? Mengapa?

Angka 3, 2 di sini artinya angka 3 pada dadu warna merah dan angka 2 pada dadu warna putih, dan berbeda dengan 2, 3 yaitu angka 2 pada dadu merah dan angka 3 pada dadu putih. Karena warna kedua dadu berbeda, maka urutan menjadi penting.

2. Jika dilihat dari tabel, setiap kotak atau hasil berbeda satu sama lain. Misalnya, hanya ada satu cara mendapatkan 5, 4, yaitu dadu merah 5 dan dadu putih 4. Demikian juga untuk setiap kotak, hanya ada satu cara mendapatkan, sehingga peluangnya $\frac{1}{36}$.

Jika kedua dadu warna sama dan tidak dibedakan mana dadu pertama dan mana dadu kedua, maka urutan tidak menjadi penting dan hasil, misalnya 4, 5 dan 5, 4 dianggap sama. Bagian yang diarsir pada tabel berikut ini tidak lagi diperlukan, dan untuk setiap hasil (kecuali yang angkanya sama) terdapat 2 cara.

| | | Angka pada Dadu Putih | | | | | |
|-----------------------|---|-----------------------|------|------|------|------|------|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Angka pada Dadu Merah | 1 | 1, 1 | 1, 2 | 1, 3 | 1, 4 | 1, 5 | 1, 6 |
| | 2 | 2, 1 | 2, 2 | 2, 3 | 2, 4 | 2, 5 | 2, 6 |
| | 3 | 3, 1 | 3, 2 | 3, 3 | 3, 4 | 3, 5 | 3, 6 |
| | 4 | 4, 1 | 4, 2 | 4, 3 | 4, 4 | 4, 5 | 4, 6 |
| | 5 | 5, 1 | 5, 2 | 5, 3 | 5, 4 | 5, 5 | 5, 6 |
| | 6 | 6, 1 | 6, 2 | 6, 3 | 6, 4 | 6, 5 | 6, 6 |

3. Peluang mendapatkan angka yang sama pada kedua dadu sama besarnya dengan peluang angka yang berbeda.



Miskonsepsi

Miskonsepsi umum adalah mendapatkan angka yang sama lebih sulit dibandingkan angka yang berbeda. Seperti yang dapat kita lihat di tabel, peluang mendapat 1, 1 adalah $\frac{1}{36}$, sama seperti peluang mendapatkan yang angka yang tidak sama, misalnya 3, 5, juga adalah $\frac{1}{36}$.

4. Untuk menjawab pertanyaan ini, maka kita melihat tabel dan menghitung semua yang ada setidaknya satu angka 5, yaitu ada 11 seperti yang terlihat di tabel berikut, maka peluangnya adalah $\frac{11}{36}$.

| | | Angka pada Dadu Putih | | | | | |
|-----------------------|---|-----------------------|------|------|------|------|------|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Angka pada Dadu Merah | 1 | 1, 1 | 1, 2 | 1, 3 | 1, 4 | 1, 5 | 1, 6 |
| | 2 | 2, 1 | 2, 2 | 2, 3 | 2, 4 | 2, 5 | 2, 6 |
| | 3 | 3, 1 | 3, 2 | 3, 3 | 3, 4 | 3, 5 | 3, 6 |
| | 4 | 4, 1 | 4, 2 | 4, 3 | 4, 4 | 4, 5 | 4, 6 |
| | 5 | 5, 1 | 5, 2 | 5, 3 | 5, 4 | 5, 5 | 5, 6 |
| | 6 | 6, 1 | 6, 2 | 6, 3 | 6, 4 | 6, 5 | 6, 6 |

5. Peluang mendapatkan setidaknya satu angka 4 adalah $\frac{11}{36}$ dan peluang mendapatkan dua angka yang sama adalah $\frac{6}{36}$. Oleh karena itu, peluang mendapatkan angka 4 lebih besar daripada peluang mendapatkan angka yang sama.

| | | Angka pada Dadu Putih | | | | | |
|-----------------------|---|-----------------------|------|------|------|------|------|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Angka pada Dadu Merah | 1 | 1, 1 | 1, 2 | 1, 3 | 1, 4 | 1, 5 | 1, 6 |
| | 2 | 2, 1 | 2, 2 | 2, 3 | 2, 4 | 2, 5 | 2, 6 |
| | 3 | 3, 1 | 3, 2 | 3, 3 | 3, 4 | 3, 5 | 3, 6 |
| | 4 | 4, 1 | 4, 2 | 4, 3 | 4, 4 | 4, 5 | 4, 6 |
| | 5 | 5, 1 | 5, 2 | 5, 3 | 5, 4 | 5, 5 | 5, 6 |
| | 6 | 6, 1 | 6, 2 | 6, 3 | 6, 4 | 6, 5 | 6, 6 |

| | | Angka pada Dadu Putih | | | | | |
|-----------------------|---|-----------------------|------|------|------|------|------|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Angka pada Dadu Merah | 1 | 1, 1 | 1, 2 | 1, 3 | 1, 4 | 1, 5 | 1, 6 |
| | 2 | 2, 1 | 2, 2 | 2, 3 | 2, 4 | 2, 5 | 2, 6 |
| | 3 | 3, 1 | 3, 2 | 3, 3 | 3, 4 | 3, 5 | 3, 6 |
| | 4 | 4, 1 | 4, 2 | 4, 3 | 4, 4 | 4, 5 | 4, 6 |
| | 5 | 5, 1 | 5, 2 | 5, 3 | 5, 4 | 5, 5 | 5, 6 |
| | 6 | 6, 1 | 6, 2 | 6, 3 | 6, 4 | 6, 5 | 6, 6 |

Pada bagian eksplorasi, biarkan peserta didik mencoba dan tidak dituntut pasti mendapatkan jawabannya. Tujuannya adalah supaya mereka mulai memikirkan bagaimana cara menggunakan tabel hasil kemungkinan untuk mulai memikirkan peluang kejadian tertentu.



Metode & Aktivitas Pembelajaran

Kaitkan hasil eksplorasi peserta didik dengan **penjelasan konsep** dan tampilkan contoh-contoh bagaimana menentukan peluang berdasarkan tabel ruang sampel. Khususnya, arahkan perhatian peserta didik pada penggunaan “**dan**” dan “**atau**” pada contoh-contoh tersebut. Minta peserta

didik membandingkan kembali dengan hasil mereka pada eksplorasi, dan diskusikan jika masih ada yang masih belum jelas atau membingungkan.

Mintalah peserta didik mengerjakan **Latihan 7.1** untuk memeriksa pemahaman mereka. Mereka dapat mengacu pada tabel ruang sampel yang sudah dibuat sebelumnya untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan tersebut.



Diferensiasi

Bagi peserta didik yang mengalami kesulitan, minta peserta didik membuat tabel seperti berikut ini, kemudian mengarsir untuk jumlah 2 menggunakan satu warna dan jumlah 3 dengan warna lain. Tanyakan, “Untuk jumlah 2 **atau** jumlah 3 maka apakah kalian menggabungkan keduanya atau mencari irisan yang memenuhi dua-duanya?” Arahkan peserta didik untuk melihat bahwa untuk “**atau**” maka cukup salah satu dipenuhi sehingga untuk menghitung peluang jumlah hasil yang diinginkan merupakan gabungan dari kedua kejadian. Lakukan yang serupa untuk soal-soal berikutnya, namun kurangi bantuan atau arahan yang diberikan sehingga peserta didik dapat mandiri mengerjakannya.

Bagi peserta didik yang kecepatan belajarnya tinggi (*advanced*), minta mereka membuat pertanyaan-pertanyaan tambahan untuk dijawab, baik sendiri maupun oleh teman yang juga memiliki kecepatan belajar tinggi. Minta mereka juga mencatat jika ada pertanyaan yang tidak dapat mereka jawab dengan informasi yang ada.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | | | | | | |

Kunci Jawaban Latihan 7.1

1. a. $\frac{3}{36} = 0,083$

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | | | | | | |

b. $\frac{33}{36} = 0,917$

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | | | | | | |

c. $\frac{35}{36} = 0,972$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | | | | | | |

d. $\frac{1}{36} = 0,028$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | | | | | | |

2. Jelaskan bagian Distribusi Peluang, dan berikan contoh mengisi dua baris pertama dari tabel distribusi peluang, dan meminta peserta didik melengkapi. Berikut tabel yang sudah dilengkapi.

| Jumlah | Peluang |
|--------|------------------------|
| 2 | $\frac{1}{36} = 0,028$ |
| 3 | $\frac{2}{36} = 0,056$ |
| 4 | $\frac{3}{36} = 0,083$ |
| 5 | $\frac{4}{36} = 0,111$ |
| 6 | $\frac{5}{36} = 0,139$ |
| 7 | $\frac{6}{36} = 0,167$ |

| Jumlah | Peluang |
|--------|------------------------|
| 8 | $\frac{5}{36} = 0,139$ |
| 9 | $\frac{4}{36} = 0,111$ |

| | |
|--------|-------------------------|
| 10 | $\frac{3}{36} = 0,083$ |
| 11 | $\frac{2}{36} = 0,056$ |
| 12 | $\frac{1}{36} = 0,028$ |
| Jumlah | $\frac{36}{36} = 1,000$ |

Setelah melengkapi tabel distribusi peluang, minta peserta didik menjawab dua pertanyaan berikut:

- a. Berapa jumlah dari semua peluang?

Jawaban: Jumlah dari semua peluang adalah 1.

- b. Bagaimana kamu dapat menggunakan tabel distribusi peluang untuk mencari peluang pada soal nomor 1?

Jawaban:

- 1) Peluang jumlah 2 atau 3: $0,028 + 0,056 = 0,084$
- 2) Peluang lebih besar dari 3 = $0,083 + 0,111 + 0,139 + 0,167 + 0,139 + 0,111 + 0,083 + 0,056 + 0,028 = 0,916$ (atau bisa juga menggunakan peluang komplementer, yaitu $1 - \text{peluang kejadian sebaliknya}$, $1 - 0,083 = 0,917$)
- 3) Peluang jumlah setidaknya 3 = $1 - \text{peluang kurang dari 3} = 1 - 0,028 = 0,972$
- 4) Peluang jumlah lebih kecil dari 3 = peluang jumlah 2 = 0,028

Tunjukkan dan jelaskan kepada peserta didik bagaimana dengan menggunakan tabel distribusi peluang dapat membantu menentukan peluang, kemudian minta peserta didik mengerjakan **Latihan 7.2** untuk memeriksa pemahaman mereka.

Kunci Jawaban Latihan 7.2

1. a.

| | | Angka pada Dadu Putih | | | | | |
|-----------------------|---|-----------------------|------|------|------|------|------|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Angka pada Dadu Merah | 1 | 1, 1 | 1, 2 | 1, 3 | 1, 4 | 1, 5 | 1, 6 |
| | 2 | 2, 1 | 2, 2 | 2, 3 | 2, 4 | 2, 5 | 2, 6 |
| | 3 | 3, 1 | 3, 2 | 3, 3 | 3, 4 | 3, 5 | 3, 6 |
| | 4 | 4, 1 | 4, 2 | 4, 3 | 4, 4 | 4, 5 | 4, 6 |
| | 5 | 5, 1 | 5, 2 | 5, 3 | 5, 4 | 5, 5 | 5, 6 |
| | 6 | 6, 1 | 6, 2 | 6, 3 | 6, 4 | 6, 5 | 6, 6 |

| Angka yang Lebih Besar | Peluang |
|------------------------|---------------------|
| 1 | $\frac{1}{36}$ |
| 2 | $\frac{3}{36}$ |
| 3 | $\frac{5}{36}$ |
| 4 | $\frac{7}{36}$ |
| 5 | $\frac{9}{36}$ |
| 6 | $\frac{11}{36}$ |
| Jumlah | $\frac{36}{36} = 1$ |

b. Peluang angka yang lebih besar adalah $3 = \frac{5}{36}$.

Peluang angka yang lebih besar adalah 2 atau 3 = $\frac{3}{36} + \frac{5}{36} = \frac{8}{36}$.

Peluang angka yang lebih besar adalah 3 atau kurang

$$= \frac{1}{36} + \frac{3}{36} + \frac{5}{36} = \frac{9}{36}.$$

Peluang angka yang lebih besar adalah lebih dari 3

$$= \frac{7}{36} + \frac{9}{36} + \frac{11}{36} = \frac{27}{36} \text{ atau } 1 - \frac{9}{36} = \frac{27}{36}.$$

2. a.

| | | Angka pada Dadu Putih | | | | | |
|-----------------------|---|-----------------------|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Angka pada Dadu Merah | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 |
| | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |

| Nilai Mutlak dari Selisih Dua Dadu | Peluang |
|------------------------------------|---------------------|
| 0 | $\frac{6}{36}$ |
| 1 | $\frac{10}{36}$ |
| 2 | $\frac{8}{36}$ |
| 3 | $\frac{6}{36}$ |
| 4 | $\frac{4}{36}$ |
| 5 | $\frac{2}{36}$ |
| Jumlah | $\frac{36}{36} = 1$ |

b. Peluang nilai mutlak selisih adalah 3 = $\frac{6}{36}$.

Peluang nilai mutlak selisih adalah 2 atau 3

$$= \frac{8}{36} + \frac{6}{36} = \frac{14}{36}.$$

Peluang nilai mutlak selisih adalah setidaknya 2

$$= \frac{8}{36} + \frac{6}{36} + \frac{4}{36} + \frac{2}{36} = \frac{20}{36}.$$

Peluang nilai mutlak selisih adalah tidak lebih dari 2

$$= \frac{6}{36} + \frac{10}{36} + \frac{8}{36} = \frac{24}{36}.$$



Diferensiasi

Bagi peserta didik yang kecepatan belajarnya tinggi (*advanced*), minta mereka mengerjakan bagian **Mandiri** dan/atau bagian **Bernalar** tanpa bantuan, dan minta mereka untuk memikirkan pertanyaan-pertanyaan yang dapat diajukan untuk kejadian melempar dua uang logam. Pada saat yang sama, guru dapat mendampingi peserta didik yang mengalami kesulitan.



Ayo, Mencoba

Kunci Jawaban

Ruang Sampel

| | | | |
|--------------|---|--------------|----|
| | | Uang Logam 2 | |
| | | G | A |
| Uang Logam 1 | G | GG | GA |
| | A | AG | AA |

Distribusi Peluang

| Jumlah Gambar | Peluang |
|---------------|---------------|
| 0 | $\frac{1}{4}$ |
| 1 | $\frac{2}{4}$ |
| 2 | $\frac{1}{4}$ |



Ayo, Berpikir Kritis

Kunci Jawaban

Jika ada waktu, minta peserta didik mengerjakan **Ayo, Berpikir Kritis** secara mandiri, berpasangan, atau dalam kelompok.

Untuk menjawab pertanyaan berpikir kritis, peserta didik dapat membuat tabel ruang sampel seperti di bawah ini dan mengarsir hasil

perkalian yang genap. Langsung terlihat bahwa jumlah hasil perkalian genap lebih banyak dibandingkan dengan hasil perkalian yang ganjil, sehingga peserta didik harus setuju dengan pernyataan dari temannya.

| | | Dadu 2 | | | | | |
|--------|---|--------|----|----|----|----|----|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Dadu 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| | 2 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
| | 3 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 |
| | 4 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 |
| | 5 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |
| | 6 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 |

Alternatif Penyelesaian:

Peserta didik dapat juga bernalar bahwa jumlah angka ganjil dan angka genap pada dadu sama banyaknya (masing-masing ada tiga angka), namun mereka tahu bahwa:

Ganjil \times Ganjil = Ganjil

Ganjil \times Genap = Genap

Genap \times Ganjil = Genap

Genap \times Genap = Genap

Oleh karena lebih banyak kasus yang hasilnya genap, maka pasti jumlah hasil perkalian yang merupakan bilangan genap akan lebih banyak dari hasil perkalian yang merupakan bilangan ganjil.



Ayo, Berdiskusi

Kunci Jawaban

Bagian ini dapat digunakan sebagai batu loncatan untuk mengajak peserta didik memikirkan berbagai miskonsepsi yang biasanya muncul di dalam memahami konsep peluang. Aktivitas ini dapat dilakukan bersama di dalam

kelas jika waktu memungkinkan, atau dapat di-*posting* sebagai diskusi daring.

Peserta didik seharusnya setuju dengan peserta didik C dan D, dengan alasan berikut.

- Peserta didik A perlu membedakan antara peluang teoretis dan peluang empiris. Secara teoretis memang peluang mendapatkan gambar dan angka ketika melemparkan uang logam adalah masing-masing $\frac{1}{2}$. Sebaliknya, secara empiris, atau percobaan, belum tentu mendapatkan tepat $\frac{1}{2}$, namun dengan semakin besar percobaan yang dilakukan, maka hasilnya akan semakin mendekati $\frac{1}{2}$, sebagaimana dinyatakan oleh peserta didik D.
- Peserta didik B memiliki miskonsepsi yang umum terdapat yaitu menganggap bahwa hasil kejadian sebelumnya akan memengaruhi hasil kejadian selanjutnya walaupun sebenarnya kejadian saling bebas (*independent events*). Di sini, peluang mendapatkan angka tetap $\frac{1}{2}$ karena dari dua hasil yang mungkin hanya ada satu kemungkinan mendapatkan angka, terlepas dari hasil kejadian sebelumnya adalah gambar, sebagaimana dinyatakan oleh peserta didik C.



Ayo, Berefleksi

Sebagai penutup dari pembelajaran subbab ini, ajak peserta didik untuk merefleksikan apa yang sudah mereka pelajari melalui dua pertanyaan.

- Apa perbedaan antara ruang sampel dan distribusi peluang?
Sampel Jawaban: Ruang sampel menyatakan himpunan dari semua hasil yang mungkin dalam percobaan peluang, sedangkan distribusi peluang menyatakan peluang terjadinya masing-masing hasil. Ruang sampel berupa himpunan, sedangkan distribusi peluang berupa angka tunggal.
- Mengapa hasil dari ruang sampel melempar dua dadu sama kemungkinannya?
Sampel Jawaban: Hasil dari ruang sampel melempar dua dadu sama kemungkinannya karena kejadian dadu pertama tidak memengaruhi dadu kedua. Terdapat 36 elemen dalam himpunan ruang sampel sehingga setiap hasil memiliki peluang yang sama yaitu $\frac{1}{36}$. Asumsi di sini adalah kejadian 1,2 berbeda dengan kejadian 2,1.

Aktivitas ini dapat dilakukan secara bersamaan dengan melakukan *Think-Pair-Share*, yaitu meminta masing-masing peserta didik memikirkan jawaban pertanyaan refleksi tersebut, kemudian berpasangan saling membagikan jawaban, memodifikasi jawaban sesuai hasil berbagi dengan pasangan, dan kemudian menyampaikan di kelas. Guru dapat melakukan penilaian formatif berdasarkan jawaban dari peserta didik sehingga dapat menekankan kembali konsep utama sesuai dengan tujuan pembelajaran, atau memperbaiki miskonsepsi yang masih dimiliki oleh peserta didik.

Aktivitas ini juga dapat dilakukan secara mandiri oleh peserta didik dengan menuliskan dalam jurnal refleksi mereka jika waktu yang tersedia singkat dan tidak memungkinkan untuk mengadakan diskusi bersama. Guru kemudian dapat mengumpulkan hasil refleksi dan memberikan umpan balik terhadap pemahaman masing-masing peserta didik.

B. Aturan Penjumlahan



Kriteria Ketercapaian Tujuan Pembelajaran

- Peserta didik mampu membedakan antara frekuensi relatif dan frekuensi harapan.
- Peserta didik mampu menggunakan frekuensi harapan untuk memprediksi peluang suatu kejadian.
- Peserta didik mampu membedakan antara kejadian saling lepas dan kejadian tidak saling lepas.
- Peserta didik mampu menggunakan aturan penjumlahan untuk menentukan peluang dua kejadian saling lepas.
- Peserta didik mampu memodifikasi aturan penjumlahan untuk menentukan peluang dua kejadian tidak saling lepas.



Apersepsi

Mengingatkan kepada peserta didik apa yang sudah dipelajari pada pertemuan sebelumnya mengenai ruang sampel dan distribusi peluang. Jika guru meminta peserta didik menuliskan refleksi di jurnal, maka dapat menekankan kembali hal-hal yang peserta didik masih belum terlalu

jelas sebagaimana tecermin dalam refleksi mereka. Gunakan bagian **Ayo, Mengingat Kembali** mengenai peluang sederhana yang sudah dipelajari di SMP.



Pemanasan

Perkenalkan **Eksplorasi 7.2** dengan membacakan atau meminta salah seorang peserta didik membacakan paragraf pembuka dari eksplorasi. Tekankan pertanyaan pemantik “*Dalam kondisi apa kamu dapat menjumlahkan masing-masing peluang kejadian untuk menentukan peluang dari kejadian yang berhubungan?*” yang akan dijawab melalui pembelajaran subbab ini.

Tanyakan kepada peserta didik siapa yang menggunakan satu moda transportasi ke sekolah dan siapa yang menggunakan lebih dari satu moda transportasi ke sekolah. Minta mereka memikirkan cara mengumpulkan informasi dari kelas mereka secara efisien. Setelah mendaftar berbagai cara mengumpulkan data, minta peserta didik untuk *voting* menentukan cara yang akan mereka gunakan.

Tekankan bahwa ada dua tabel. Tabel yang pertama adalah moda transportasi yang mereka gunakan hari itu. Jika peserta didik menggunakan lebih dari satu, pilih yang moda transportasi dengan jarak terpanjang. Jika ada pilihan lain yang tidak ada di tabel, dapat ditambahkan. Tabel yang kedua peserta didik mencatat semua moda transportasi yang biasa mereka gunakan, sehingga boleh lebih dari satu.

Setelah peserta didik sudah berhasil mengumpulkan data, minta mereka menuliskan hasilnya di papan atau jika guru menggunakan PowerPoint dan proyektor, maka dapat ditambahkan di tabel yang sudah disediakan sebelumnya.

Jelaskan pengertian kata “atau” yang digunakan dalam matematika, khususnya konteks peluang.



Miskonsepsi

Tekankan perbedaan dari penggunaan kata “atau” dalam kehidupan sehari-hari dengan dalam peluang. Dalam penggunaan sehari-hari, ketika ditanyakan, “Kamu mau jeruk ATAU pisang?” artinya diberikan pilihan salah satu dan bukan dua-duanya. Berbeda dengan penggunaan dalam peluang, ketika ditanya, “Berapa peserta didik yang menggunakan sepeda atau menggunakan motor ke sekolah?” maka baik peserta didik yang menggunakan sepeda saja, menggunakan motor saja, atau menggunakan keduanya akan dihitung.

Minta peserta didik mendiskusikan pertanyaan-pertanyaan pada **Eksplorasi 7.2** dengan berpasangan atau anggota kelompok lainnya. Kemudian minta beberapa pasang peserta didik atau kelompok mempresentasikan hasil diskusi mereka. Jika ada perbedaan pendapat antarpeserta didik, tidak perlu diselesaikan karena ini hanya merupakan pemicu. Bagian selanjutnya, yaitu Penjelasan Konsep dan Contoh-Contoh akan mengarahkan mereka pada jawaban yang benar.

Sampel Jawaban Eksplorasi 7.2

- Pertanyaan ini dapat dijawab dari tabel. Tambahkan jumlah peserta didik yang menggunakan sepeda dan jumlah peserta didik yang menggunakan motor pada tabel pertama, kemudian dibagi dengan total jumlah peserta didik.
 - Pertanyaan ini tidak dapat dijawab dari tabel.
- Pertanyaan 1.b. tidak dapat dijawab karena ada kemungkinan peserta didik yang terhitung di kedua kategori moda transportasi tersebut. Informasi yang dibutuhkan adalah berapa peserta didik yang menggunakan baik sepeda maupun motor.

Penjelasan Konsep dan Contoh-Contoh

Berikan penjelasan mengenai kejadian saling lepas melalui contoh tabel data yang sudah dikumpulkan. Kemudian minta peserta didik berpikir soal pada **Ayo, Berpikir Kritis**, pertama secara mandiri, kemudian berbagi dengan pasangan atau kelompok. Minta satu peserta didik/pasangan kelompok menyampaikan hasil penalaran mereka dan peserta didik/pasangan kelompok lain boleh menyetujui atau tidak menyetujui serta mempertanyakan hasil yang dipresentasikan. Pastikan argumen yang

diberikan masuk akal dan sesuai dengan pengertian dari kata “atau” dalam matematika.

Jawaban Ayo, Berpikir Kritis

- Kejadian saling lepas karena tidak mungkin mendapatkan jumlah 7 dari dua angka yang sama.
- Kejadian tidak saling lepas karena mendapatkan jumlah 8 dapat terjadi pada saat yang bersamaan mendapatkan angka yang sama (4, 4).
- Kejadian saling lepas karena Abi tidak mungkin menggunakan mobil dan kendaraan umum pada saat yang bersamaan (asumsi dia hanya menggunakan satu moda transportasi sekali jalan).
- Kejadian tidak saling lepas karena keduanya dapat terjadi pada saat yang bersamaan, yaitu hari ini Zain menggunakan motor dan biasanya menggunakan sepeda.



Ayo, Berpikir Kritis

Pada bagian ini, ajak peserta didik untuk memikirkan perbedaan antara peluang teoretis yang sudah mereka pelajari dengan peluang eksperimental atau percobaan. Guru dapat meminta mereka melakukan percobaan dengan menggunakan dadu untuk melihat bahwa hasil peluang percobaan belum tentu sama dengan peluang teoretis. Minta peserta didik menentukan peluang percobaan terlebih dahulu sebelum membahas mengenai frekuensi relatif.



Miskonsepsi

Seringkali peserta didik menganggap bahwa peluang percobaan sama dengan peluang teoretis. Misalnya, peluang mendapatkan angka genap pada pelemparan dadu adalah $\frac{1}{2}$, maka untuk 10 kali percobaan, mereka akan mengatakan atau mengharapkan angka genap muncul 5 kali. Kegiatan ini memberikan kesempatan guru untuk mendiskusikan hal ini.

Tekankan bahwa peluang percobaan akan makin mendekati peluang teoretis dengan semakin banyak melakukan percobaannya. Guru dapat meminta setiap peserta didik melakukan 10 kali percobaan dan mencatat hasilnya. Kemudian kumpulkan semua jawaban peserta didik dan hitung frekuensi relatifnya. Guru dapat menggunakan tabel seperti di bawah ini untuk mengumpulkan hasilnya.

| Peserta didik | Frekuensi mendapatkan angka genap | Frekuensi Relatif |
|---------------|-----------------------------------|-------------------|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |
| ... | | |
| | | |

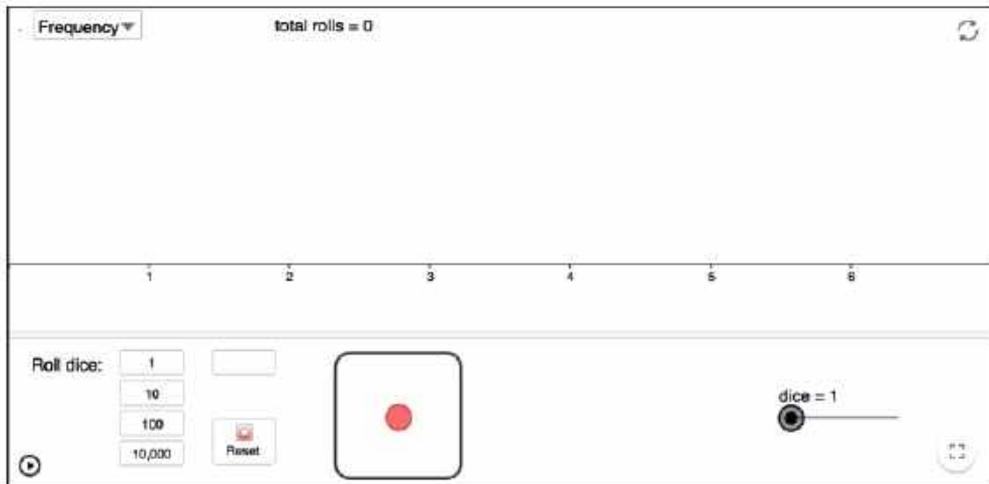
Hitung jumlah frekuensi keseluruhan dan dibagi dengan jumlah percobaan yang dilakukan. Karena setiap peserta didik melakukan 10 percobaan, maka jika ada 30 peserta didik, maka jumlah percobaan yang dilakukan adalah $30 \times 10 = 300$. Frekuensi relatif keseluruhan ini kemungkinan besar akan lebih mendekati nilai $\frac{1}{2}$ atau 0,5. Jika tidak, minta peserta didik menambahkan jumlah percobaan yang dilakukan dan menghitung kembali hasilnya.

Sebagai alternatif, guru dapat menggunakan aplikasi daring berikut ini untuk menunjukkan simulasi atau meminta peserta didik mencoba simulasinya: <https://buku.kemdikbud.go.id/s/zewry0>

Dice Roll Simulation

Author: George Sturr

Roll some dice!



Pastikan memilih “dice = 1”, kemudian tekan angka 1, 10, 100, atau 10,000 yang merupakan jumlah percobaan. Peserta didik dapat melihat jika jumlah percobaan kecil, hasilnya tidak merata, atau dengan kata lain peluang mendapatkan angka tertentu tidak sama besarnya sebagaimana yang mereka ketahui untuk peluang teoretisnya. Namun, dengan meningkatkan jumlah percobaan, maka mereka akan melihat bahwa frekuensi relatifnya mendekati sama untuk setiap angka.

Catatan: Guru meminta peserta didik memprediksi angka mana yang akan paling banyak muncul, kemudian menekan ‘10’ percobaan, dan menanyakan apakah hasilnya sesuai dengan yang diprediksi. Lakukan ini beberapa kali untuk melihat reaksi peserta didik. Kemudian guru menekan ‘100’ atau ‘10.000’ untuk menunjukkan makin besar jumlah percobaan maka frekuensi relatif mendapatkan setiap angka mendekati peluang teoretisnya.



Ayo, Berdiskusi

Minta peserta didik membaca dan mendiskusikan situasi yang diberikan dan menjawab pertanyaannya sebelum menjelaskan mengenai frekuensi harapan. Tekankan di sini bahwa peserta didik menggunakan frekuensi relatif yang didapatkan dari percobaan untuk memperkirakan frekuensi munculnya sebuah kejadian.



Miskonsepsi

Kadang kala peserta didik tertukar antara frekuensi relatif dan frekuensi harapan. Tekankan bahwa frekuensi relatif didapat melalui percobaan, sedangkan frekuensi harapan merupakan perkiraan berdasarkan frekuensi relatif. Pastikan juga bahwa peserta didik memahami bahwa frekuensi relatif berupa pecahan atau desimal yang menunjukkan peluang, sedangkan frekuensi harapan menunjukkan jumlah munculnya kejadian yang diinginkan, dan bukan peluangnya. Oleh karena itu, frekuensi harapan dalam bentuk bilangan cacah, bukan pecahan atau desimal. Jika hasilnya tidak bulat, maka dibulatkan ke bawah.

Sebagai asesmen formatif, guru dapat memeriksa pemahaman peserta didik dengan mengubah frekuensi relatif yang didapat melalui percobaan, kemudian meminta peserta didik menentukan frekuensi harapan untuk berbagai jumlah percobaan yang dilakukan.

Kunci Jawaban Latihan 7.3

- Peluang percobaan mendapatkan angka lima adalah $\frac{14}{100}$ atau dalam bentuk paling sederhananya adalah $\frac{7}{50}$.
 - $\frac{7}{50} = 0,14$
 - Frekuensi harapan mendapatkan 5 untuk 200 kali percobaan adalah $0,14 \times 200 = 28$ kali.
- Frekuensi dari pengujian lampu pijar yang kurang dari 3.000 jam tetapi lebih dari 1.000 jam dapat dilihat dari tabel dan dijumlahkan $75 + 160 = 235$. Karena jumlah total percobaan adalah

$30 + 75 + 160 + 35 = 300$, maka frekuensi relatifnya adalah $\frac{235}{300}$ yang dapat disederhanakan menjadi $\frac{47}{60}$ atau bentuk desimalnya 0,783.

- b. Frekuensi relatif untuk lampu pijar yang dapat menyala lebih dari 3.000 jam adalah $\frac{35}{300}$, sehingga jika ada pesanan 2.000 lampu ini, maka frekuensi harapannya adalah $\frac{35}{300} \times 2.000 = 233,33\dots$ atau 233 lampu pijar yang diharapkan akan menyala lebih dari 3.000 jam.
3.
 - a. Banyaknya responden didapat dengan menjumlah frekuensi untuk masing-masing kategori, $14 + 28 + 20 + 5 + 13 = 80$.
 - b. Frekuensi relatif untuk kategori 'petualang' adalah $\frac{28}{80}$ atau dapat disederhanakan menjadi $\frac{7}{20}$.
 - c. Frekuensi relatif untuk kategori 'horor' adalah $\frac{5}{80}$. Jika populasi 480 mengisi survei, maka frekuensi harapan memilih kategori 'horor' adalah $\frac{5}{80} \times 480 = 30$ orang.
4. Karena frekuensi relatif orang kidal adalah 0,23, maka yang bukan kidal adalah 0,77. Frekuensi harapan orang yang bukan kidal untuk populasi 10.000 penduduk adalah $0.77 \times 10.000 = 7.700$ orang.

1. Dua Kejadian A dan B Saling Lepas

Bimbing peserta didik melalui pertanyaan-pertanyaan pada bagian 1 mengenai dua kejadian A dan B saling lepas.

- a. Gambar yang di sebelah kanan menggambarkan situasi dua kejadian yang saling lepas.
- b. Karena pada gambar kedua lingkaran A dan B tidak beririsan, maka peluang bahwa A dan B terjadi adalah 0. $P(A \cap B) = 0$.
- c. Untuk kasus dua kejadian yang saling lepas, peluang terjadinya A atau B, $P(A \cup B)$, adalah gabungan atau penjumlahan dari masing-masing peluang terjadinya A dan peluang terjadinya B, atau $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

2. Dua Kejadian A dan B Tidak Saling Lepas

Bimbing peserta didik melalui pertanyaan-pertanyaan pada bagian 2 mengenai dua kejadian A dan B tidak saling lepas.

- Diagram yang sebelah kiri menggambarkan dua kejadian yang tidak saling lepas.
- Peluang terjadinya A dan B digambarkan oleh daerah yang merupakan irisan antara lingkaran A dan lingkaran B.
- Untuk kasus dua kejadian yang tidak saling lepas, maka peluang terjadinya A atau B merupakan gabungan atau penjumlahan dari masing-masing peluang terjadinya A dan peluang terjadinya B, tetapi perlu dikurangi dengan daerah yang merupakan irisan antara keduanya, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Minta beberapa peserta didik untuk menjelaskan kembali perbedaan antara dua kejadian saling lepas dan dua kejadian tidak saling lepas.

Minta peserta didik mengerjakan **Latihan 7.4**. Pertanyaan yang diberikan terstruktur dengan pertanyaan bantuan yang makin dikurangi dengan harapan peserta didik menjadi lebih mandiri. Ingatkan peserta didik dapat menggunakan tabel ruang sampel untuk lemparan dua dadu yang sudah dibuat pada **Eksplorasi 7.1**.

Kunci Jawaban Latihan 7.4

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|------|------|------|------|------|------|
| 1 | 1, 1 | 1, 2 | 1, 3 | 1, 4 | 1, 5 | 1, 6 |
| 2 | 2, 1 | 2, 2 | 2, 3 | 2, 4 | 2, 5 | 2, 6 |
| 3 | 3, 1 | 3, 2 | 3, 3 | 3, 4 | 3, 5 | 3, 6 |
| 4 | 4, 1 | 4, 2 | 4, 3 | 4, 4 | 4, 5 | 4, 6 |
| 5 | 5, 1 | 5, 2 | 5, 3 | 5, 4 | 5, 5 | 5, 6 |
| 6 | 6, 1 | 6, 2 | 6, 3 | 6, 4 | 6, 5 | 6, 6 |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

1. Peluang mendapatkan dua angka sama atau berjumlah 5. Dua kejadian ini saling lepas seperti dapat dilihat pada kedua tabel di atas yang menunjukkan hasil angka sama dan yang berjumlah 5. Peluang mendapatkan angka sama adalah, $P(A) = \frac{6}{36}$. Peluang mendapatkan jumlah 5 adalah, $P(B) = \frac{4}{36}$. Oleh karena itu, peluang mendapatkan angka yang sama atau berjumlah 5 adalah,
- $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{6}{36} + \frac{4}{36} = \frac{10}{36}.$$

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

2. Peluang mendapatkan dua angka sama atau berjumlah 2 merupakan kejadian yang tidak saling lepas, sehingga
- $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$
- $P(A) = \frac{6}{36}$, $P(B) = \frac{1}{36}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{36}$. Oleh karena itu,
- $$P(A \cup B) = \frac{6}{36} + \frac{1}{36} - \frac{1}{36} = \frac{6}{36}.$$

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 |
| 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

3. Peluang bahwa nilai mutlak dari selisih adalah 2 atau mendapatkan jumlah 5. Kedua kejadian ini saling lepas seperti terlihat pada tabel ruang sampel di atas. Kita juga dapat bernalar bahwa pasangan bilangan yang membentuk 5 adalah 1, 4 dan 2, 3, yang mana nilai mutlak dari selisihnya bukan 2, maka peluangnya adalah,
- $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{8}{36} + \frac{4}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}.$$
4. Peluang bahwa nilai mutlak dari selisih adalah 2 atau mendapatkan jumlah 11 adalah $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{8}{36} + \frac{2}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$ karena kedua kejadian adalah saling lepas.



Ayo, Berefleksi

Tutup pembelajaran dengan meminta peserta didik melakukan refleksi terhadap apa yang sudah mereka pelajari dengan menjawab pertanyaan refleksi dan berpikir kreatif.

Apa perbedaan dua kejadian yang saling lepas dan yang tidak saling lepas berdasarkan aturan penjumlahannya? Mengapa?

Perbedaan antara dua kejadian yang saling lepas dan yang tidak saling lepas adalah ada atau tidaknya peluang terjadi dua-duanya pada saat bersamaan, atau $P(A \cap B)$.

Berikan sebuah contoh dua kejadian yang saling lepas yang berbeda dengan yang dieksplorasi.

Jawaban variatif.

C. Aturan Perkalian



Kriteria Ketercapaian Tujuan Pembelajaran

- Peserta didik mampu membedakan antara kejadian saling bebas dan kejadian tidak saling bebas.
- Peserta didik mampu menggunakan aturan perkalian untuk menentukan peluang dua kejadian saling bebas.



Apersepsi

Ingatkan peserta didik apa yang sudah dipelajari pada pertemuan sebelumnya mengenai aturan penjumlahan untuk peluang dua kejadian saling lepas. Minta peserta didik menyampaikan hasil refleksi mereka pada **Ayo, Berefleksi**, dan adakan diskusi dan berikan penguatan jika masih ada peserta didik yang masih belum memahami. Sampaikan pertanyaan pemantik berikut untuk memicu pemikiran peserta didik.

Bagaimana menentukan peluang dua kejadian terjadi secara bersamaan, misalnya seorang anak mewariskan gen lesung pipi dari ibunya dan dari ayahnya?

Berikan waktu kepada peserta didik untuk berpikir dan menjawab. Tampung semua jawaban tanpa perlu memberikan umpan balik karena ini hanya sebagai pemantik saja.



Pemanasan

Perkenalkan **Eksplorasi 7.3** dengan meminta peserta didik membaca masing-masing, kemudian berpasangan untuk saling menjelaskan apa yang mereka pahami mengenai masalahnya. Ingatkan mereka bahwa pada tahap ini mereka belum diminta untuk menjawab pertanyaannya, tetapi hanya memastikan mereka memahami permasalahan yang disajikan. Sampel dua atau tiga peserta didik untuk menyampaikan pemahaman mereka mengenai permasalahan. Berikan penguatan jika diperlukan.

Berikan waktu sekitar 20–30 menit untuk peserta didik mencoba menjawab pertanyaan secara mandiri, berpasangan, atau berkelompok. Guru dapat berkeliling dan memastikan peserta didik fokus mengerjakan eksplorasi dan melakukan klarifikasi atau menjawab pertanyaan yang dimiliki peserta didik. Kemudian diskusikan hasilnya bersama-sama (guru dapat meminta beberapa peserta didik untuk menjelaskan apa yang mereka lakukan dan hasilnya).

Sampel Jawaban Eksplorasi 7.3

1. Ketika melempar sepasang dadu, maka ruang sampelnya sebagai berikut:

| | | Dadu Kedua | | | | | |
|---------------------|---|-------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Dadu Pertama | 1 | (1, 1) | (1, 2) | (1, 3) | (1, 4) | (1, 5) | (1, 6) |
| | 2 | (2, 1) | (2, 2) | (2, 3) | (2, 4) | (2, 5) | (2, 6) |
| | 3 | (3, 1) | (3, 2) | (3, 3) | (3, 4) | (3, 5) | (3, 6) |
| | 4 | (4, 1) | (4, 2) | (4, 3) | (4, 4) | (4, 5) | (4, 6) |
| | 5 | (5, 1) | (5, 2) | (5, 3) | (5, 4) | (5, 5) | (5, 6) |
| | 6 | (6, 1) | (6, 2) | (6, 3) | (6, 4) | (6, 5) | (6, 6) |

Dari 36 kemungkinan, 6 di antaranya hasil angkanya sama, sehingga peluangnya adalah $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Maka, masuk akal jika baris dilabel dengan satu angka dobel dan lima angka tidak dobel. Karena lemparan kedua juga terdiri atas sepasang dadu, maka hasil pelabelan sama sebagaimana terlihat pada tabel.

Lemparan Kedua Sepasang Dadu

| | | Kedua Angka Sama (Dobel) | Kedua Angka Tidak Sama (Tidak Dobel) |
|--------------------------------|--------------------------------------|--------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| Lemparan Pertama Sepasang Dadu | Kedua Angka Sama (Dobel) | | | | | | |
| | Kedua Angka Tidak Sama (Tidak Dobel) | | | | | | |
| | Kedua Angka Tidak Sama (Tidak Dobel) | | | | | | |
| | Kedua Angka Tidak Sama (Tidak Dobel) | | | | | | |
| | Kedua Angka Tidak Sama (Tidak Dobel) | | | | | | |
| | Kedua Angka Tidak Sama (Tidak Dobel) | | | | | | |

2. Kotak yang diarsir biru menunjukkan kejadian tidak mendapatkan angka yang sama pada lemparan pertama dan mendapatkan angka yang sama pada lemparan kedua.

Catatan: Jika peserta didik kesulitan mendapatkan jawaban ini, guru dapat menunjukkan arsiran untuk kejadian tidak mendapatkan angka yang sama pada lemparan pertama.

Lemparan Kedua Sepasang Dadu

Kedua Angka Sama (Dobel) Kedua Angka Tidak Sama (Tidak Dobel) Kedua Angka Tidak Sama (Tidak Dobel)

| | | | | | | |
|---------------------------------------|--------------------------------------|--|--|--|--|--|
| Lemparan Pertama Sepasang Dadu | Kedua Angka Sama (Dobel) | | | | | |
| | Kedua Angka Tidak Sama (Tidak Dobel) | | | | | |
| | Kedua Angka Tidak Sama (Tidak Dobel) | | | | | |
| | Kedua Angka Tidak Sama (Tidak Dobel) | | | | | |
| | Kedua Angka Tidak Sama (Tidak Dobel) | | | | | |
| | Kedua Angka Tidak Sama (Tidak Dobel) | | | | | |

Lemparan Kedua Sepasang Dadu

Kedua Angka Sama (Dobel) Kedua Angka Tidak Sama (Tidak Dobel) Kedua Angka Tidak Sama (Tidak Dobel)

| | | | | | | |
|---------------------------------------|--------------------------------------|--|--|--|--|--|
| Lemparan Pertama Sepasang Dadu | Kedua Angka Sama (Dobel) | | | | | |
| | Kedua Angka Tidak Sama (Tidak Dobel) | | | | | |
| | Kedua Angka Tidak Sama (Tidak Dobel) | | | | | |
| | Kedua Angka Tidak Sama (Tidak Dobel) | | | | | |
| | Kedua Angka Tidak Sama (Tidak Dobel) | | | | | |
| | Kedua Angka Tidak Sama (Tidak Dobel) | | | | | |

Kemudian menunjukkan kejadian mendapatkan angka yang sama pada lemparan kedua, sehingga bagian yang tumpang tindih menunjukkan hasil kedua kejadian.

- Dari model luas, didapatkan banyaknya kejadian pertama adalah lima (5) dari keseluruhan kemungkinan 36, maka peluangnya adalah $\frac{5}{36}$.
- Peluang mendapatkan angka yang sama pada kedua lemparan hanya ada 1 dari 36, atau $\frac{1}{36}$, sebagaimana dapat dilihat pada gambar berikut.

Lemparan Kedua Sepasang Dadu

| | Kedua Angka Sama (Dobel) | Kedua Angka Tidak Sama (Tidak Dobel) |
|--------------------------------------|--------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| Lemparan Pertama Sepasang Dadu | Kedua Angka Sama (Dobel) | | | | | |
| Kedua Angka Tidak Sama (Tidak Dobel) | | | | | | |
| Kedua Angka Tidak Sama (Tidak Dobel) | | | | | | |
| Kedua Angka Tidak Sama (Tidak Dobel) | | | | | | |
| Kedua Angka Tidak Sama (Tidak Dobel) | | | | | | |
| Kedua Angka Tidak Sama (Tidak Dobel) | | | | | | |

- Peluang tidak mendapatkan angka yang sama pada kedua lemparan sebagaimana terlihat pada gambar berikut adalah $\frac{25}{36}$.

Lemparan Kedua Sepasang Dadu

| | Kedua Angka Sama (Dobel) | Kedua Angka Tidak Sama (Tidak Dobel) |
|--------------------------------------|--------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| Lemparan Pertama Sepasang Dadu | Kedua Angka Sama (Dobel) | | | | | |
| Kedua Angka Tidak Sama (Tidak Dobel) | | | | | | |
| Kedua Angka Tidak Sama (Tidak Dobel) | | | | | | |
| Kedua Angka Tidak Sama (Tidak Dobel) | | | | | | |
| Kedua Angka Tidak Sama (Tidak Dobel) | | | | | | |
| Kedua Angka Tidak Sama (Tidak Dobel) | | | | | | |



Ayo, Berdiskusi

Arahkan peserta didik untuk melihat atau menghubungkan apa yang mereka sudah ketahui mengenai metode mencari hasil perkalian pecahan jika mereka tidak menemukan hubungannya. Dorong mereka untuk mendiskusikan bagaimana mencari peluang dua kejadian yang saling bebas tanpa menggunakan model luas. Jika dibutuhkan, bantu mereka menyimpulkan bahwa untuk dua kejadian yang saling bebas, maka

$$P(A \text{ dan } B) = P(A) \times P(B)$$

Kunci Jawaban Latihan 7.5

1. a. Opsi 2

Opsi 1 tidak menunjukkan kejadian yang saling lepas karena yang diminta adalah salah satu kejadian saja, dan bukan kedua-duanya.

Opsi 3 menunjukkan satu kejadian yang memenuhi keduanya, dan bukan dua kejadian yang saling bebas.

b. Aturan perkalian dapat digunakan untuk menentukan peluang ini karena kedua kejadian merupakan kejadian yang saling bebas. Kejadian pelemparan pertama sepasang dadu dan mendapatkan angka dobel tidak memengaruhi kejadian pelemparan kedua untuk mendapatkan jumlah 6.

Kejadian A = lemparan pertama angka dobel

Kejadian B = lemparan kedua berjumlah 6

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \frac{5}{36}$$

$$P(A \text{ dan } B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{36} = \frac{5}{216}$$

2. A = kejadian Sani memasukkan bola dalam keranjang

B = kejadian Oka memasukkan bola dalam keranjang

$$P(A) = 0,1$$

$$P(B) = 0,2$$

- a. Peluang keduanya memasukkan bola dalam keranjang
 $P(A \text{ dan } B) = P(A) \times P(B) = 0,1 \times 0,2 = 0,02$
- b. $C =$ kejadian Oka tidak memasukkan bola dalam keranjang.
 Peluang Oka tidak memasukkan bola dalam keranjang
 $= 1 - \text{Peluang Oka memasukkan bola dalam keranjang}$
 $P(C) = 1 - P(B) = 1 - 0,2 = 0,8$
 Peluang Sani memasukkan bola ke dalam keranjang, tetapi Oka tidak:
 $P(A) \times P(C) = 0,1 \times 0,8 = 0,08$
3. Ruang sampel untuk sebuah dadu yang dilempar dua kali

| | | Dadu Kedua | | | | | |
|--------------|---|------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Dadu Pertama | 1 | (1, 1) | (1, 2) | (1, 3) | (1, 4) | (1, 5) | (1, 6) |
| | 2 | (2, 1) | (2, 2) | (2, 3) | (2, 4) | (2, 5) | (2, 6) |
| | 3 | (3, 1) | (3, 2) | (3, 3) | (3, 4) | (3, 5) | (3, 6) |
| | 4 | (4, 1) | (4, 2) | (4, 3) | (4, 4) | (4, 5) | (4, 6) |
| | 5 | (5, 1) | (5, 2) | (5, 3) | (5, 4) | (5, 5) | (5, 6) |
| | 6 | (6, 1) | (6, 2) | (6, 3) | (6, 4) | (6, 5) | (6, 6) |

- a. $P(\text{angka pertama } 6 \text{ dan angka kedua } 6) =$
 $P(\text{angka pertama } 6) \times P(\text{angka kedua } 6) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$
- b. $P(\text{angka pertama genap dan angka kedua genap}) =$
 $P(\text{angka pertama genap}) \times P(\text{angka kedua genap}) =$
 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
- c. Kasus ini bukan saling bebas karena kejadian yang kedua tergantung pada kejadian yang pertama. Kejadian pertama bisa angka mana saja, sehingga peluangnya 1. Kejadian kedua tergantung pada hasil kejadian pertama, tetapi selalu hanya ada satu pilihan. Misalnya pada lemparan pertama dadu angkanya adalah 1, maka kejadian kedua hanya ada satu pilihan, atau peluangnya $\frac{1}{6}$. Apapun angka

yang muncul pada kejadian satu, maka selalu hanya ada satu dari enam kemungkinan mendapatkan angka yang sama.

- d. Kasus ini mirip dengan sebelumnya, namun perbedaannya pada kejadian kedua ada 5 pilihan yang tidak sama angkanya dengan hasil pada lemparan pertama sehingga peluangnya adalah $\frac{5}{6}$
4. a. (merah, merah); (merah, biru); (biru, merah); (biru, biru)
- Jumlah bola merah: 5
Jumlah bola biru: $12 - 5 = 7$
- b. 1) Peluang untuk mendapatkan bola pertama biru adalah $\frac{7}{12}$
2) Peluang untuk mendapatkan bola kedua merah adalah $\frac{5}{12}$
3) Peluang untuk mendapatkan bola pertama biru dan bola kedua merah adalah $\frac{7}{12} \times \frac{5}{12} = \frac{35}{144}$
4) Peluang untuk mendapatkan kedua bola memiliki warna yang sama adalah $(\frac{5}{12} \times \frac{5}{12}) + (\frac{7}{12} \times \frac{7}{12}) = \frac{25}{144} + \frac{49}{144} = \frac{74}{144}$
5) Peluang untuk mendapatkan kedua bola memiliki warna yang berbeda adalah $(\frac{5}{12} \times \frac{7}{12}) + (\frac{7}{12} \times \frac{5}{12}) = \frac{35}{144} + \frac{35}{144} = \frac{70}{144}$
6) Peluang untuk mendapatkan kedua bola bukan merah adalah $\frac{7}{12} \times \frac{7}{12} = \frac{49}{144}$
7) Peluang untuk mendapatkan setidaknya satu bola merah adalah $(\frac{5}{12} \times \frac{5}{12}) + (\frac{5}{12} \times \frac{7}{12}) + (\frac{7}{12} \times \frac{5}{12}) = \frac{25}{144} + \frac{35}{144} + \frac{35}{144} = \frac{95}{144}$

Latihan 7.6

Sebagai pekerjaan rumah, minta peserta didik mengerjakan **Latihan 7.6**.

Sebagai Contoh:

- Peserta didik dengan kesulitan belajar: #1, 2, 3, 4, 6, 10
- Peserta didik biasa: #1, 4, 5, 6, 7, 10
- Peserta didik kecepatan belajar tinggi: 4, 5, 7, 8, 9, 10

Kunci Jawaban Latihan 7.6

1. a. $\{(G, G, G), (G, G, A), (G, A, G), (A, G, G), (G, A, A), (A, G, A), (A, A, G), (A, A, A)\}$
- b. Ya. Masing-masing hasil di dalam ruang sampel ini sama besar kemungkinan terjadinya karena memiliki peluang yang sama, yaitu $\frac{1}{8}$.

c.

| Jumlah gambar | Peluang |
|---------------|---------------|
| 0 | $\frac{1}{8}$ |
| 1 | $\frac{3}{8}$ |
| 2 | $\frac{3}{8}$ |
| 3 | $\frac{1}{8}$ |

$$P(\text{tepat 2 gambar}) = \frac{3}{8}$$

$$P(\text{paling banyak 2 gambar}) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$

2. a. Saling lepas karena jika salah satu dadu adalah angka 6, maka jumlahnya pasti lebih dari 6.
 - b. Saling lepas karena harus tepat 5 dan tepat 3.
 - c. Tidak saling lepas karena setidaknya 3 tercakup dalam setidaknya 5. Sehingga ada irisan antara dua kejadian.
3. a. $P(\text{jumlah 6 atau satu 6}) = P(\text{jumlah 6}) + P(\text{satu enam}) = \frac{5}{36} + \frac{10}{36} = \frac{15}{36}$
 - b. $P(\text{jumlah 6 atau angka sama}) = P(\text{Jumlah 6}) + P(\text{angka sama}) - P(\text{jumlah 6 dan angka sama}) = \frac{5}{36} + \frac{6}{36} - \frac{1}{36} = \frac{10}{36}$.

4. a.

| | | | | |
|---|--------|--------|--------|--------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | (1, 1) | (1, 2) | (1, 3) | (1, 4) |
| 2 | (2, 1) | (2, 2) | (2, 3) | (2, 4) |
| 3 | (3, 1) | (3, 2) | (3, 3) | (3, 4) |
| 4 | (4, 1) | (4, 2) | (4, 3) | (4, 4) |

b. 16 hasil kemungkinan dan sama besar kemungkinannya.

c.

| | | | | |
|---|---|----|----|----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 0 | -1 | -2 | -3 |
| 2 | 1 | 0 | -1 | -2 |
| 3 | 2 | 1 | 0 | -1 |
| 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |

| Selisih | Peluang |
|---------|----------------|
| -3 | $\frac{1}{16}$ |
| -2 | $\frac{2}{16}$ |
| -1 | $\frac{3}{16}$ |
| 0 | $\frac{4}{16}$ |
| 1 | $\frac{3}{16}$ |
| 2 | $\frac{2}{16}$ |
| 3 | $\frac{1}{16}$ |

d. Selisih 0

e. $\frac{1}{16} + \frac{2}{16} + \frac{3}{16} + \frac{4}{16} + \frac{3}{16} + \frac{2}{16} = \frac{15}{16}$ atau $1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$.

5. a.

| | | | | | | |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | (1, 1) | (1, 2) | (1, 3) | (1, 4) | (1, 5) | (1, 6) |
| 2 | (2, 1) | (2, 2) | (2, 3) | (2, 4) | (2, 5) | (2, 6) |
| 3 | (3, 1) | (3, 2) | (3, 3) | (3, 4) | (3, 5) | (3, 6) |
| 4 | (4, 1) | (4, 2) | (4, 3) | (4, 4) | (4, 5) | (4, 6) |

b. Ada 24 hasil kemungkinan dan semua sama besar kemungkinannya.

c.

| Jumlah | Peluang |
|--------|----------------|
| 2 | $\frac{1}{24}$ |
| 3 | $\frac{2}{24}$ |
| 4 | $\frac{3}{24}$ |
| 5 | $\frac{4}{24}$ |
| 6 | $\frac{4}{24}$ |
| 7 | $\frac{4}{24}$ |
| 8 | $\frac{3}{24}$ |
| 9 | $\frac{2}{24}$ |
| 10 | $\frac{1}{24}$ |

d. Jumlah 5, 6, 7 memiliki peluang paling besar yaitu masing-masing $\frac{4}{24}$.

e. $\frac{1}{24} + \frac{2}{24} = \frac{3}{24}$

6. a. Saling lepas. $P = \frac{2}{16} + \frac{4}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

b. Saling lepas. $P = \frac{4}{16} + \frac{4}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$.

c. Tidak saling lepas. $P = \frac{4}{16} + \frac{4}{16} - \frac{4}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

d. Tidak saling lepas. $P = \frac{4}{16} + \frac{3}{16} - \frac{1}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

7. a. Peluang mendapatkan angka yang sama untuk lemparan pertama adalah $\frac{1}{6}$ yang merupakan kemungkinan yang cukup kecil. Demikian juga peluang mendapatkan angka yang sama pada lemparan kedua

adalah $\frac{1}{6}$. Sangat tidak masuk akal jika peluang mendapatkan dua hasil ini menjadi lebih besar.

- b. Cara berpikir sama dengan 7a yaitu sangat tidak masuk akal jika peluangnya menjadi 1, yang artinya pasti terjadi. Padahal, justru kemungkinannya seharusnya semakin kecil mendapatkan angka yang sama berturut-turut sebanyak 6 kali.
8. a. {(GGGG), (GGGA), (GGAG), (GAGG), (AGGG), (GGAA), (GAGA), (GAAG), (AGGA), (AGAG), (AAGG), (GAAA), (AGAA), (AAGA), (AAAG), (AAAA)}

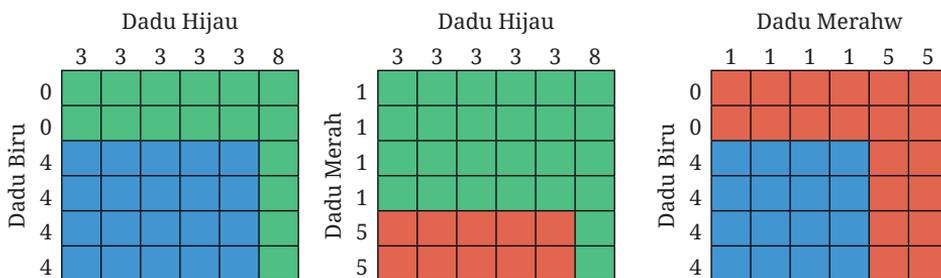
b. Ya

c.

| Jumlah Gambar | Peluang |
|---------------|----------------|
| 0 | $\frac{1}{16}$ |
| 1 | $\frac{4}{16}$ |
| 2 | $\frac{6}{16}$ |
| 3 | $\frac{4}{16}$ |
| 4 | $\frac{1}{16}$ |

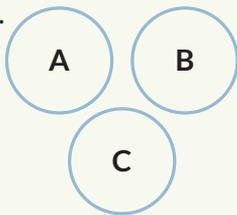
d. $P(\text{tepat 2 gambar}) = \frac{6}{16}$; $P(\text{paling banyak 2 gambar}) = \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{6}{16} = \frac{11}{16}$.

9. Untuk menentukan dadu mana yang memiliki peluang lebih besar menang, dapat dibuat tabel-tabel sebagai berikut:

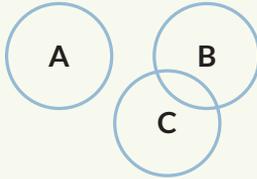


Jika teman memilih dadu biru, maka dadu merah memiliki peluang lebih besar untuk menang. Jika teman memilih dadu hijau, maka dadu biru memiliki peluang lebih besar untuk menang. Jika teman memilih dadu merah, maka dadu hijau memiliki peluang lebih besar untuk menang. Kejutannya adalah tidak ada satu dadu yang pasti selalu menang.

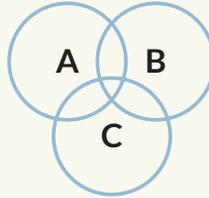
10. a.



b.



c.



d. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

e. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C)$

f. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

Kunci Jawaban

Uji Kompetensi

1. a. $S = \{1,2,3,4,5,6\}$, $P(4) = \frac{1}{6}$

b. $P(4 \text{ atau lebih}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

c. $P(4 \text{ atau lebih}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

d. $P(\text{bilangan genap}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

2. a.

| | | | | | | | | |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1 | (1, 1) | (1, 2) | (1, 3) | (1, 4) | (1, 5) | (1, 6) | (1, 7) | (1, 8) |
| 2 | (2, 1) | (2, 2) | (2, 3) | (2, 4) | (2, 5) | (2, 6) | (2, 7) | (2, 8) |
| 3 | (3, 1) | (3, 2) | (3, 3) | (3, 4) | (3, 5) | (3, 6) | (3, 7) | (3, 8) |
| 4 | (4, 1) | (4, 2) | (4, 3) | (4, 4) | (4, 5) | (4, 6) | (4, 7) | (4, 8) |
| 5 | (5, 1) | (5, 2) | (5, 3) | (5, 4) | (5, 5) | (5, 6) | (5, 7) | (5, 8) |
| 6 | (6, 1) | (6, 2) | (6, 3) | (6, 4) | (6, 5) | (6, 6) | (6, 7) | (6, 8) |
| 7 | (7, 1) | (7, 2) | (7, 3) | (7, 4) | (7, 5) | (7, 6) | (7, 7) | (7, 8) |
| 8 | (8, 1) | (8, 2) | (8, 3) | (8, 4) | (8, 5) | (8, 6) | (8, 7) | (8, 8) |

b.

| Jumlah | Peluang |
|--------|----------------|
| 2 | $\frac{1}{64}$ |
| 3 | $\frac{2}{64}$ |
| 4 | $\frac{3}{64}$ |
| 5 | $\frac{4}{64}$ |
| 6 | $\frac{5}{64}$ |
| 7 | $\frac{6}{64}$ |
| 8 | $\frac{7}{64}$ |
| 9 | $\frac{8}{64}$ |

| Jumlah | Peluang |
|--------|----------------|
| 10 | $\frac{7}{64}$ |
| 11 | $\frac{6}{64}$ |
| 12 | $\frac{5}{64}$ |
| 13 | $\frac{4}{64}$ |
| 14 | $\frac{3}{64}$ |
| 15 | $\frac{2}{64}$ |
| 16 | $\frac{1}{64}$ |

c. $P(8) = \frac{7}{64}; P(\text{setidaknya } 8) = \frac{43}{64}$

d.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 |
| 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |

| Jumlah | Peluang |
|--------|-----------------|
| 0 | $\frac{8}{64}$ |
| 1 | $\frac{14}{64}$ |

| Jumlah | Peluang |
|--------|-----------------|
| 2 | $\frac{12}{64}$ |
| 3 | $\frac{10}{64}$ |

| Jumlah | Peluang |
|--------|----------------|
| 4 | $\frac{8}{64}$ |
| 5 | $\frac{6}{64}$ |

| Jumlah | Peluang |
|--------|----------------|
| 6 | $\frac{4}{64}$ |
| 7 | $\frac{2}{64}$ |

e. $P(\text{selisih } 6) = \frac{4}{64} = \frac{1}{16}; P(\text{setidaknya } 6) = \frac{6}{64} = \frac{3}{32}$

3. a. Saling bebas: $P(\text{angka sama atau jumlah } 7) = P(\text{angka sama}) + P(\text{jumlah } 7)$

$$= \frac{8}{64} + \frac{6}{64} = \frac{14}{64} = \frac{7}{32}$$

b. Tidak saling bebas: $P(\text{angka sama atau jumlah } 8) = P(\text{angka sama}) +$

$$P(\text{jumlah } 8) - P(\text{angka sama dan jumlah } 8) = \frac{8}{64} + \frac{7}{64} - \frac{1}{64} = \frac{14}{64} = \frac{7}{32}$$

c. Saling bebas: $P(\text{jumlah } 7 \text{ atau jumlah } 8) = P(\text{jumlah } 7) + P(\text{jumlah } 8)$

$$= \frac{6}{64} + \frac{7}{64} = \frac{13}{32}$$

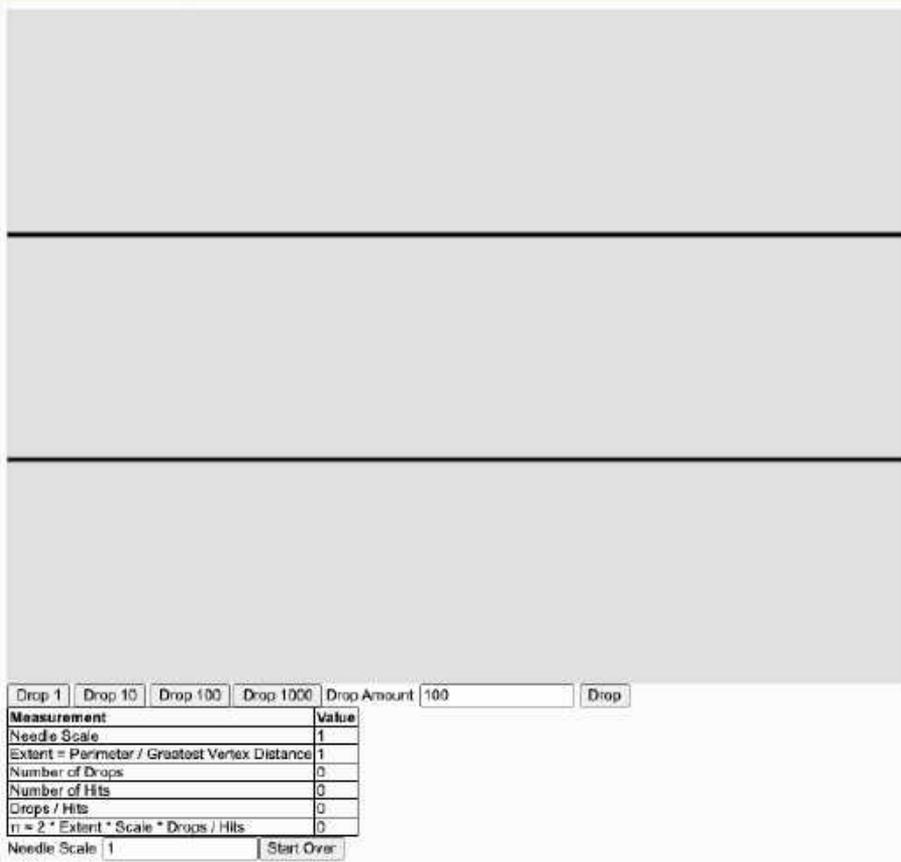
Pengayaan

Proyek ini bersifat opsional dan dapat diberikan sebagai tugas tambahan jika peserta didik memiliki akses komputer dengan aplikasi Microsoft Excel atau sejenisnya. Proyek ini dapat dilakukan secara mandiri atau berkelompok.

Jelaskan tujuan proyek dan pastikan semua peserta didik mengerti setiap langkah yang harus dilakukan. Berikan kesempatan bagi peserta didik untuk bertanya untuk mengklarifikasi apa yang perlu dilakukan. Jika peserta didik belum terlalu biasa menggunakan aplikasi Microsoft Excel, ambil waktu untuk menjelaskan singkat bagaimana menggunakan aplikasi tersebut atau meminta mereka mengikuti tutorial yang terdapat pada YouTube.

Peserta didik atau kelompok dapat diminta menuliskan laporan atau mempersiapkan presentasi kelas. Sebagai alternatif, peserta didik dapat juga menggunakan aplikasi simulasi daring untuk melakukan percobaan: <https://buku.kemdikbud.go.id/s/qf6yhz>. Tekan tombol “Drop 100” dan catat hasil pada “Number of Hits”. Ulangi menekan tombol yang sama dan catat hasilnya pada tabel.

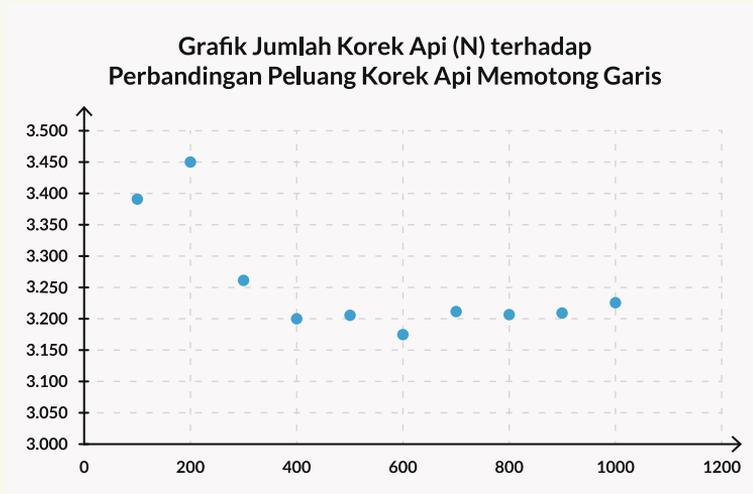




Kunci Jawaban

Hasil percobaan akan berbeda-beda untuk setiap peserta didik atau kelompok. Berikut ini data sebagai contoh perhitungannya dan kemungkinan bentuk grafiknya.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | Jumlah dijatuhkan (N) | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 | 700 | 800 | 900 | 1000 |
| 2 | Jumlah korek memotong/menyentuh garis (n) | 59 | 116 | 184 | 250 | 312 | 378 | 436 | 499 | 561 | 620 |
| 3 | Peluang memotong garis ($p = \frac{n}{N}$) | 0,590 | 0,580 | 0,613 | 0,625 | 0,624 | 0,630 | 0,623 | 0,624 | 0,623 | 0,620 |
| 4 | $\frac{2}{p}$ | 3,390 | 3,448 | 3,261 | 3,200 | 3,205 | 3,175 | 3,211 | 3,206 | 3,209 | 3,226 |



Nilai $\frac{2}{p}$ seharusnya semakin mendekati nilai π , yaitu sekitar 3,14. Jika pada percobaan dan grafik yang dibuat belum terlihat nilai $\frac{2}{p}$ mendekati nilai π , minta peserta didik melanjutkan percobaan atau menggunakan simulasi daring.

Bagi peserta didik yang memiliki kemampuan tinggi, dapat meminta mereka menjelaskan mengapa nilai tersebut mendekati nilai π . Penjelasan dapat dilihat di <https://buku.kemdikbud.go.id/s/qf6yhz>.



Refleksi

Di akhir pembelajaran bab ini, minta peserta didik untuk memikirkan kembali apa saja yang sudah mereka pelajari dengan melakukan asesmen diri dengan menjawab pertanyaan pada tabel. Guru memberikan apresiasi kepada peserta didik yang sudah mandiri dan memberikan penguatan kepada peserta didik yang masih membutuhkan bantuan. Peserta didik yang belum memiliki kompetensi yang diharapkan dapat diberikan in. Uji Kompetensi juga diberikan untuk mengukur ketercapaian tujuan pembelajaran dari bab ini.

Glosarium

berpikir kritis: merupakan kemampuan untuk menggunakan berbagai jenis penalaran, menggunakan pemikiran sistem, menganalisis dan mengevaluasi keadaan, berpikir reflektif, melakukan sintesis terhadap beberapa argumen untuk membuat sebuah keputusan dalam upaya penyelesaian masalah.

desmos: merupakan perangkat lunak berbasis web dan aplikasi telepon pintar yang dapat digunakan sebagai kalkulator dasar, kalkulator saintifik, kalkulator grafik, alat geometri, dan pembuat aktivitas matematika interaktif.

flipped classroom: pendekatan belajar dengan siswa menerima materi pelajaran di luar kelas (biasanya disampaikan dalam video-video pembelajaran) dan melakukan aktivitas pembelajaran yang berpusat siswa di dalam kelas (atau tatap muka).

kecakapan abad ke-21: adalah kecakapan, keterampilan, atau kompetensi yang dibutuhkan di abad ke-21, yang meliputi keterampilan hidup dan karier, keterampilan belajar dan berinovasi (berpikir kritis, komunikasi, kolaborasi, dan kreativitas), serta keterampilan informasi, media, dan teknologi.

kemampuan berpikir aras tinggi: merupakan kemampuan untuk menganalisis, mengevaluasi, dan mencipta.

kolaborasi: merupakan kemampuan bekerja dengan orang lain di dalam kelompok untuk mencapai tujuan bersama.

komunikasi: merupakan kemampuan menyampaikan dan mendengarkan ide, gagasan, dan bentuk lain secara efektif.

kreativitas: merupakan kemampuan untuk berpikir (menggunakan ide yang luas membuat ide baru, serta mengelaborasi, memperbaiki, menganalisis, dan mengevaluasi ide sendiri untuk perbaikan ide tersebut) dan berkerja dengan orang lain secara kreatif, serta kemampuan untuk mengimplementasikan inovasi.

motivasi: adalah suatu kehendak atau disposisi untuk terlibat dan bertahan di tugas tertentu.

pembelajaran kooperatif: merupakan model pembelajaran yang melibatkan kelompok-kelompok kecil yang menggunakan struktur tugas, insentif, dan motif untuk menghasilkan perilaku kooperatif.

pendidikan karakter: merupakan pendidikan yang mengembangkan nilai-nilai yang khas-baik dari siswa untuk diimplementasikan ke dalam lingkungan di sekitarnya.

pengayaan: merupakan suatu kegiatan pembelajaran yang ditujukan untuk siswa yang memiliki kecepatan belajar tinggi agar mereka dapat memanfaatkan waktu belajarnya untuk memperdalam dan memperluas materi yang mereka pelajari.

penilaian: adalah kegiatan pengumpulan dan pengolahan informasi yang dimaksudkan untuk mengukur pencapaian hasil belajar siswa.

penyingkapan terbimbing: merupakan pendekatan berpusat siswa yang tujuannya untuk menciptakan suatu lingkungan belajar agar siswa mampu menemukan atau menyingkap konsep, prinsip, atau prosedur tentang konten pembelajaran tertentu dengan bimbingan yang diperlukan.

refleksi: merupakan aktivitas menganalisis pengalaman, kemampuan, atau keterampilan yang bertujuan untuk pembelajaran dan perbaikan di masa mendatang.

remedial: merupakan suatu kegiatan yang direncanakan dan dilakukan untuk memperbaiki hasil belajar bagi siswa yang mengalami kesulitan belajar.

rubrik: merupakan pedoman penilaian yang berisi aspek-aspek atau kategori-kategori penilaian yang jelas dan digunakan untuk mengukur hasil pekerjaan siswa.

tutorial sebaya: adalah strategi pembelajaran yang diterapkan guru kepada siswa untuk membantu satu sama lain belajar dan membelajarkan diri sendiri dengan mengajar.

Daftar Pustaka

- Attwood, G., Bettison, I. 2019. *Pearson Edexcel International A Level: Statistics 1*. Pearson Education Limited.
- Batanero, C., J Chernoff, E., Engel, J., Lee, H.S., & Sánchez, E. 2016. *Research on Teaching and Learning Probability*. Springer Nature.
- Brahier, D.J. 2020. *Teaching Secondary and Middle School Mathematics*. Routledge.
- Brumbaugh, D.K., & Rock, D. 2010. *Teaching Secondary Mathematics*. Routledge.
- Foster, C. 2012. *The Essential Guide to Secondary Mathematics: Successful and Enjoyable Teaching and Learning*. Routledge.
- Goos, M., Vale, C., Stillman, G., Makar, K., Herbert, S., & Geiger, V. 2020. *Teaching Secondary School Mathematics: Research and Practice for The 21st Century*. Routledge.
- Hirsch, C. R. 2008. *Core-plus Mathematics: Contemporary Mathematics in Context. Course 1 Student Edition*. Glencoe/McGraw-Hill.
- Hirsch, C. R. 2008. *Core-plus Mathematics: Contemporary Mathematics in Context. Course 2 Student Edition*. Glencoe/McGraw-Hill.
- Jones, G. A. (Ed.). 2006. *Exploring Probability in School: Challenges for Teaching and Learning* (Vol. 40). Springer Science & Business Media.
- Johnston-Wilder, S., & Pimm, D. 2004. *Teaching Secondary Mathematics with ICT*. McGraw-Hill Education (UK).
- Larson, R. 2011. *Algebra and Trigonometry, eighth edition*. Cengage Learning.
- Murdock, J., Kamischke, E., & Kamischke, E. 2007. *Discovering Algebra: An Investigative Approach, Second Edition*. Key Curriculum Press.
- Pimentel, R., Wall, T. 2013. *Mathematics Core and Extended, 3rd Edition*. Cambridge IGCSE, Hodder Education

<https://www.forbes.com/sites/naomiobbins/2012/01/04/a-histogram-is-not-a-bar-chart/?sh=13ebb1326d77>

<https://corona.jakarta.go.id/id/data-pemantauan>

<https://www.mathsisfun.com/activity/buffons-needle.html>. Diunduh tanggal 18 Januari 2021 pukul 22.00 WIB.

[https://math.libretexts.org/Bookshelves/Calculus/Book%3A_Calculus_\(OpenStax\)/12%3A_Vectors_in_Space/12.1%3A_Vectors_in_the_Plane](https://math.libretexts.org/Bookshelves/Calculus/Book%3A_Calculus_(OpenStax)/12%3A_Vectors_in_Space/12.1%3A_Vectors_in_the_Plane). Diunduh pada tanggal 19 Januari 2021 pukul 21.52 WIB.

<https://www.maths.usyd.edu.au/u/MOW/vectors/vectors-7/v-7-1.html>. Diunduh pada tanggal 19 Januari 2021 pukul 21.52 WIB.

Sharma, R.D. 2001. *Objective Mathematics Textbook*. Dhanpat Rai Publications (P) Ltd.

Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. 2015. *Algebra and Trigonometry*. Cengage Learning.

Sutisna, E., 2020. *Modul Pembelajaran SMA, Matematika Peminatan Kelas X*. Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan Indonesia.

Tan, S. 2008. *College Mathematics for the Managerial, Life, and Social Sciences, seventh edition*. Thomson Brooks/Cole.

Watson, A., Jones, K., & Pratt, D. 2013. *Key Ideas in Teaching Mathematics: Research-based Guidance for Ages 9-19*. OUP Oxford.

Yeo, J., Seng, T. K., Yee, L. C., Chow, I., Meng, N. C., & Liew, J. 2013. *New Syllabus Mathematics Textbook 1*. Shing Lee Publishers Pte Ltd.

Yeo, J., Seng, T. K., Yee, L. C., & Chow, I. 2013. *New Syllabus Additional Mathematics Textbook*. Shing Lee Publishers Pte Ltd.

Daftar Sumber Gambar

Gambar kover buku dan bab diolah dari berbagai sumber gambar yang diunduh dari:

- <https://www.pexels.com/photo/silhouette-of-a-man-playing-basketball-13820499/> pada tanggal 11 November 2023 pukul 23.05 WIB
- <https://www.pexels.com/photo/a-boy-standing-near-the-ball-8941614/> pada tanggal 29 Oktober 2023 pukul 13.35 WIB
- <https://www.flickr.com/photos/188454520@N02/49913653136> pada tanggal 23 November 2023 pukul 09.19 WIB
- <https://www.pexels.com/photo/man-dunking-the-ball-163452/> pada tanggal 30 Oktober 2023 pukul 19.30 WIB
- <https://www.dreamstime.com/stock-image-surveyor-engineer-making-measure-field-image35957071> pada tanggal 15 November 2023 pukul 22.30 WIB
- <https://www.pexels.com/photo/person-solving-distance-of-points-2714073/> pada tanggal 17 November 2023 pukul 16.34 WIB
- <https://www.pexels.com/photo/aftermath-of-an-earthquake-in-bhaktapur-7806169/> pada tanggal 23 November 2023 pukul 19.32 WIB
- Savitri/kemendikbudristek (2023)

Indeks

A

Aturan penjumlahan 260
Aturan Perkalian vi, 27, 270, 287

B

Barisan aritmetika 81

C

Clinometer 115, 124

D

Dadu 247, 248, 249, 250, 254, 255, 257,
259, 267, 278, 281
Deret bilangan 81, 87
Deret geometri 87, 89, 100
Deret geometri tak hingga 100
Deret tak hingga konvergen 87
Desmos 13, 41, 128, 138
Diskusi 33, 36, 54, 109, 117, 118, 217, 225,
247, 258, 259, 261
Distribusi peluang 252, 253, 254, 259, 260

E

Bentuk akar 50, 51, 53, 63, 103
Eksponen 35, 103
Fungsi eksponensial 39, 40, 41, 45, 54, 63,
103
Peluruhan eksponen 45
Pertumbuhan eksponen 43, 45
Evaluasi 14

F

Flipped Classroom 15

Akar-akar persamaan kuadrat 183
Fungsi kuadrat 42, 178, 182, 183, 185, 188,
189, 191, 193
Titik potong dengan sumbu y 179
Titik puncak 181, 188, 189
Diskriminan 183
Terbuka ke atas 178, 181, 183, 184
Terbuka ke bawah 178, 181, 183, 184
Titik potong dengan sumbu x 183

G

GeoGebra 12, 33, 41, 48, 116, 128, 138, 191

K

Karakter 17, 291
Tidak saling bebas 284, 288
Kejadian 205, 250, 251, 253, 256, 258, 259,
260, 262, 266, 267, 268, 269, 270, 278
Saling lepas 260, 262, 266, 267, 268, 269,
270, 278, 280
Tidak saling lepas 260, 262, 267, 269, 270
Kemungkinan 49, 135, 136, 139, 143, 219,
250, 258, 262, 278, 279, 280, 285

L

Logaritma 63

O

Orang tua 15, 296, 299, 300, 305, 309

P

Aturan perkalian 275, 288
Kejadian saling bebas 288
Aturan penjumlahan 260

Distribusi 252, 253, 254, 259, 260
Kejadian saling lepas 260, 262, 267
Kejadian tidak saling lepas 260, 267
Peluang 249, 250, 251, 252, 253, 254, 258,
259, 260, 261, 267, 268, 270, 278, 280,
281
Percobaan 258, 259, 284, 285, 286
Ruang sampel 250, 251, 257, 259, 260, 267,
269, 278
Teoretis 258
peluruhan eksponen 45
Percobaan 90, 107, 108, 225, 258, 259, 284,
285, 286
pertumbuhan eksponen 43, 45

R

Ruang sampel 250, 251, 257, 259, 260, 267,
269, 278

S

Segitiga siku-siku 110, 111, 116, 118, 119,
120, 121, 122, 123
Segitiga 94, 108, 109, 110, 111, 112, 113,
114, 115, 116, 118, 119, 120, 121, 122,
123, 124, 222
Segitiga sebangun 114
Sumbu simetri 180, 184, 187, 188, 196

T

Tabel distribusi peluang 252, 253, 254
Theodolit 107
Cosinus 109, 118, 119, 121, 122
Perbandingan trigonometri 109, 110, 111,
114, 116, 118, 120, 121, 123, 124
Sinus 109, 118, 119, 121, 122

Sisi depan 110, 111, 112, 113, 115, 117, 118,
119, 122
Sisi miring 110, 113, 118, 119, 122, 124
Sisi samping 109, 113
Sudut istimewa 120, 121, 123
Tangen 109, 110, 111, 113, 115, 121, 124
Trigonometri 107, 109, 110, 116, 120

U

Angka 58, 108, 222, 237, 248, 249, 250, 255,
257, 258, 259, 262, 268, 269, 278, 280,
281
Gambar 43, 73, 115, 183, 184, 205, 208,
209, 226, 256, 266, 281, 294
Uang logam 247

V

Penjumlahan 81, 87, 260, 267
Vektor 11

Biodata Pelaku Perbukuan

Biodata Penulis

Nama Lengkap : Dicky Susanto, Ed.D
E-mail : dicky.susanto@calvin.ac.id
Alamat Kantor : Menara Calvin Lt. 8, RMCI. Jl. Industri
Blok B14 Kav. 1 Kemayoran, Jakarta
Pusat 10610, Indonesia
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika



Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Head of Instructional Design dan Dosen, Calvin Institute of Technology (2019–sekarang)
2. Head of Instructional Design dan Dosen, Indonesia International Institute of Life Sciences (2016–2019)
3. Education Consultant, Curriculum Developer and Teacher Trainer (2015–sekarang)
4. Postdoctoral Research Associate, North Carolina State University (2012–2014)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S3: Program Studi Pascasarjana Pendidikan Matematika, Boston University, Massachusetts, USA (2004-2009)
2. S2: Program Studi Pascasarjana Pendidikan Matematika, Boston University, Massachusetts, USA (2002-2003)
3. S1: Program Studi Teknik Kimia, Institut Teknologi Indonesia, Tangerang (1992-1997)

Judul Buku dan Tahun Terbit (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. Pengarah Materi untuk Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Kelas Awal (Modul Belajar Siswa, Modul Guru, dan Modul Orang Tua) (2020-2021)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. “Coordinating Multiple Composite Units as a Conceptual Principle in Time Learning Trajectory” (2020)

Nama Lengkap : Theja Kurniawan
E-mail : theja.kurniawan@santa-laurensia.
sch.id
Alamat Kantor : Jalan Sutera Utama No. 1, Alam Sutera,
Tangerang Selatan 15325
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika



Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 tahun Terakhir:

1. Kepala SMA Santa Laurensia (2013-sekarang)
2. Head of Mathematics Department, Sekolah Santa Laurensia (2006-2013)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S2: Program Studi Pascasarjana Pendidikan, Universitas Pelita Harapan (2005-2007)
2. S2: Program Studi Manajemen Operasi, PPM (1999-2001)
3. S1: Program Studi Teknik Sipil, Universitas Tarumanagara (1994-1999)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir)

1. Tidak ada.

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. Tidak ada.

Nama Lengkap : Savitri Sihombing, M.Sc.
E-mail : savitri.sihombing@gmail.com
Alamat Kantor : Yayasan Sinergi Mencerdaskan Tunas Negeri Jalan Scientia Boulevard Barat Blok DRWB No. 8 Sektor Ruko Darwin, Summarecon Serpong Tangerang, Banten 15334
<https://www.yayasansimetri.or.id/>



Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Tim Akademik Matematika, Yayasan Sinergi Mencerdaskan Tunas Negeri (2017-sekarang)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S2: Program Studi Pascasarjana Applied Mathematics, University of Twente, Enschede, The Netherlands (2003-2005)
2. S1: Program Studi Teknik Elektro, Institut Teknologi Bandung, Bandung, Indonesia (1996-2001)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. Dicky Susanto, dkk (2022), Matematika untuk SD Kelas VI, Kemdikbud, Jakarta.
2. Dicky Susanto dkk (2022), Matematika untuk SMP Kelas VII, Kemdikbud, Jakarta.
3. Dicky Susanto, dkk (2021), Matematika untuk SMA/SMK Kelas XI, Kemdikbud, Jakarta.
4. Dicky Susanto dkk (2021), Matematika untuk SMA/SMK Kelas X, Kemdikbud, Jakarta.
5. Direktorat SMP (2021), Inspirasi Pembelajaran yang Memperkuat Numerasi Pada Mata Pelajaran Matematika untuk Jenjang Sekolah Menengah Pertama, Modul, Kemdikbud, Jakarta
6. Direktorat SMP (2021), Inspirasi Pembelajaran yang Memperkuat Numerasi Pada Mata Pelajaran IPA, IPS, PJOK, dan Seni Budaya untuk Jenjang Sekolah Menengah Pertama, Modul, Kemdikbud, Jakarta
7. Pusmenjar (2020), Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi

- Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 1 Tema 1 Subtema 2, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
8. Pusmenjar (2020), Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 1 Subtema 2, Tema 2 Subtema 3, dan Tema 3 Subtema 2, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
 9. Pusmenjar (2020), Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 1 Subtema 2, Tema 2 Subtema 3, Tema 3 Subtema 2, Tema 4 Subtema 2, Tema 5 Subtema 2, Tema 6 Subtema 2, Tema 7 Subtema 2, Tema 8 Subtema 2, Tema 9 Subtema 2, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
 10. Pusmenjar (2020), Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 7 Bumi dan Benda di Langit Subtema 2 Bulan dan Bintang, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
 11. Pusmenjar (2020), Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 8 Profesi Subtema 2 Produsen, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
 12. Pusmenjar (2020), Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 9 Perayaan Subtema 2 Hari Besar Nasional, Modul, Kemdikbud, Jakarta.

Nama Lengkap : Eunice Salim, M.Ed.
E-mail : esalim@asu.edu
Alamat Kantor : Menara Calvin Lt. 13, RMCI. Jl.
Industri Blok B14 Kav. 1. Kemayoran,
Jakarta Pusat 10610, Indonesia
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika



Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. *Chief Networking Officer*, Paideia Educational Solutions, Bali, Indonesia (2020-sekarang)
2. Staf Kurikulum, Sekolah Kristen Calvin, Jakarta, Indonesia (2019-sekarang)
3. Guru Kelas 4 SD, Indian Hills Elementary, Gallup, USA (2016-2019)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S2: Program Studi Pascasarjana Learning Design and Technologies, Arizona State University, Phoenix, USA (2017-2019)
2. S1: Program Studi Elementary Math Education, Calvin University, Grand Rapids, USA (2012-2016)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 1 Diriku Subtema 4 Perasaanku*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
2. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 2 MakhluK Hidup dan Benda Mati di Lingkungan Kita Subtema 4 Mainan*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
3. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 2 MakhluK Hidup dan Benda Mati di Lingkungan Kita Subtema 4 Mainan*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.

4. Pusmenjar (2020), Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 3 Pancaindra Subtema 4 Alat yang Membantu Pancaindra, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
5. Pusmenjar (2020), Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 3 Pancaindra Subtema 4 Alat yang Membantu Pancaindra, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
6. Pusmenjar (2020), Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 1 Tema 4 Memelihara Diri dan Lingkungan Kita Subtema 4 Bencana Alam, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
7. Pusmenjar (2020), Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 4 Memelihara Diri dan Lingkungan Kita Subtema 4 Bencana Alam, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
8. Pusmenjar (2020), Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 4 Memelihara Diri dan Lingkungan Kita Subtema 4 Bencana Alam, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
9. Pusmenjar (2020), Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 1 Tema 5 Lingkungan dan Alam Indonesiaku Subtema 4 Cuaca di Pulauku, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
10. Pusmenjar (2020), Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 5 Lingkungan dan Alam Indonesiaku Subtema 4 Cuaca di Pulauku, Modul, Kemdikbud, Jakarta.

Nama Lengkap : Marianna Magdalena Radjawane, M.Si.
E-mail : marianna.radjawane@gmail.com
Alamat Kantor : -
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika dan Fisika



Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Dosen Jarak Jauh STKIP Terang Bangsa Timika (2020-2022)
2. Konsultan Pendidikan, Pengembang Kurikulum dan Pelatih Guru (2013-sekarang)
3. Guru Fisika SMA Cita Buana Jakarta (2013-2015)
4. Divisi Pelatihan Guru Surya Institute (2007-2013)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S2: Program Studi Pascasarjana Fisika, Institut Teknologi Bandung (1990-1993)
2. S1: Program Studi Astronomi, Institut Teknologi Bandung (1983-1989)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 1 Diriku Subtema 3 Aktivitas yang Menyehatkan*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
2. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 1 Diriku Subtema 3 Aktivitas yang Menyehatkan*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
3. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 2 Makhluk Hidup dan Benda Mati di Lingkungan Kita Subtema 2 Serangga dan Hewan Kecil*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.

Nama Lengkap : Ummy Salmah, M.Pd.,M.Sc
E-mail : ummysalmah87@gmail.com
Instansi : SEAMEO QITEP in Mathematics
Alamat Kantor : JL. Kaliurang KM 6, Sambisari,
Condongcatur Depok, Sleman, DI
Yogyakarta.
Bidang Keahlian : Pendidikan matematika, Realistic
Mathematics Education, STEM
Education.



Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Dosen Pendidikan Matematika, Fakultas Tarbiyah UIN Alauddin Makassar (2016-2017)
2. Training Specialist, SEAMEO Regional Centre for QITEP in Mathematics, Yogyakarta (2017-sekarang)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S2: Science and Mathematics Education, Curtin University (2015)
2. S2: Pendidikan Matematika, Universitas Sriwijaya (2012-2014)
3. S1: Pendidikan Matematika, Universitas Negeri Makassar (2006-2010)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. Buku Seri 1: Konsep Dasar Numerasi untuk Guru SD (2024). Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi.
2. Buku Seri 2: Konsep Dasar Numerasi untuk Guru SD (2024). Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi.
3. Matematika untuk SD/MI Kelas VI. (2022). Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi.
4. Perangkat Pembelajaran STEM+Computational Thinking: Parasut (2021). SEAMEO QITEP in Mathematics.
5. Perangkat Pembelajaran STEM+Computational Thinking: Lingkungan Ramah Difabel dengan Ramp (2021). Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi.
6. Perangkat Pembelajaran STEM+Computational Thinking: Rumah Tahan Gempa (2021). Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi.
7. Matematika untuk SMA/SMK Kelas X (2021). Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi.
8. Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran

Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 1 Tema 2 Subtema 3, Tema 3 Subtema 2, Tema 4 Subtema 2, Tema 5 Subtema 2, Tema 6 Subtema 2, Tema 7 Subtema 2, Tema 8 Subtema 2, Tema 9 Subtema 2, (2020). Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi.

9. Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 1 Subtema 1, Tema 3 Subtema 2, Tema 4 Subtema 2, Tema 5 Subtema 2, Tema 6 Subtema 2, Tema 7 Subtema 2, Tema 8 Subtema 2, Tema 9 Subtema 2 (2020). Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi.
10. Modul Pembelajaran Jarak Jauh. Implementasi Teknologi MIMO Relay System sebagai Inovasi IoT dalam Mendukung Pembelajaran Jarak Jauh di Daerah 3T pada Kondisi Covid di Indonesia (2020). Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi.
11. Persamaan Diophantine dan Aplikasinya (2013). Unit Perpustakaan PPS Universitas Sriwijaya.
12. Pemecahan Masalah Matematika (2013). Unit Perpustakaan PPS Universitas Sriwijaya.

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. Ten-Structure as Strategy of Addition 1-20 by Involving Spatial Structuring Ability for First Grade Students. (2015). *International Education Studies*, 8(11), 16-252.
2. Mathematics Teachers' Perception and Readiness in Implementing STEM Education. (2017). *SMTE Conference Proceeding*.
3. Elementary school teachers' perceptions of STEM: What do teachers perceive? (2020). In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1581, No. 1, p. 012039). IOP Publishing.
4. Developing a Test of Mathematical Literacy based on STEM-PjBL using ADDIE Model. (2022) in 5th International Conference on Education and Social Science Research (ICESRE), *KnE Social Sciences*, pages 382–391. DOI 10.18502/kss.v7i19.12458
5. Fostering students' mathematical critical thinking skills on number patterns through digital book STEM PjBL. (2023). *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 19(7), em2297.
6. STEM Village: Promoting and Spreading Awareness about STEM to Families and the Society. (2023). *Reform and Development in Teacher Education for the Digital Society*.

Nama Lengkap : Ambarsari Kusuma Wardani, M.Pd.
E-mail : ambarsariks_uin@radenfatah.ac.id
Alamat Kantor : Jl. Prof. K. H. Zainal Abidin Fikri, Km
3.5, Palembang.
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika



Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Dosen Pendidikan Matematika, Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan, UIN Raden Fatah Palembang (2016-sekarang)
2. Guru Matematika, SMA Negeri 17 Palembang (2014-2016)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S2: Pendidikan Matematika, Universitas Sriwijaya (2012-2014)
2. S1: Pendidikan Matematika, Universitas Sriwijaya (2007-2011)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. Buku Seri 1: Konsep Dasar Numerasi untuk Guru SD (2024). Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi.
2. Buku Seri 2: Konsep Dasar Numerasi untuk Guru SD (2024). Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi.
3. Literasi Matematis sebagai Kecakapan Abad 21. (2023), Numerasia, Surabaya.
4. Matematika untuk SD/MI Kelas VI. (2022). Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi.
5. Matematika untuk SMP/ Mts Kelas VII. (2022). Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi.
6. Inspirasi Pembelajaran yang Memperkuat Numerasi pada Mata Pelajaran IPA, IPS, PJOK dan Seni Budaya untuk Jenjang Sekolah Menengah Pertama. (2021). Direktorat SMP, Direktorat Jenderal Pendidikan Anak Usia Dini, Pendidikan Dasar, dan Pendidikan Menengah, Kemdikbudristek.
7. Inspirasi Pembelajaran yang Memperkuat Numerasi pada Mata Pelajaran Matematika untuk Jenjang Sekolah Menengah Pertama. (2021). Direktorat SMP, Direktorat Jenderal Pendidikan Anak Usia Dini, Pendidikan Dasar, dan Pendidikan Menengah, Kemdikbudristek.

8. Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 1 Tema 1 Subtema 3, Kelas 2 Tema 1 Subtema 4, Kelas 2 Tema 5 Subtema 1, Kelas 2 Tema 6 Subtema 1, Kelas 3 Tema 1 Subtema 1, Kelas 3 Tema 1 Subtema 1, (2020). Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi.

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. “Pengembangan E-Modul Berbasis Canva dengan Konteks Kearifan Lokal pada Pembelajaran Matematika Sekolah” (2022)
2. “Pengembangan Modul Numerasi Terintegrasi Nilai Islam untuk Siswa Sekolah Dasar” (2021)
3. “Pengembangan Soal Pemecahan Masalah Matematika dengan Konteks Islami untuk Siswa Sekolah Menengah Pertama” (2020)
4. “Profil Soal Model PISA Pada Tugas Akhir Mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika UIN Raden Fatah Palembang” (2019)
5. “Peningkatan Kemampuan Pemecahan Masalah dan Disposisi Matematis melalui Pendekatan Matematika Realistik bernuansa Etnomatematik Suku Anak Dalam (PMRE SAD)” (2018)

Biodata Penelaah

Nama Lengkap : Prof. Dr. Sunardi, M.Pd.
E-mail : sunardi.fkip@unej.ac.id
Alamat Kantor : FKIP Universitas Jember, Jalan
Kalimantan Nomor 37 Jember
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika



Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Sebagai dosen Pendidikan Matematika sejak tahun 1983 sampai sekarang
2. Sebagai Editor Buku Matematika Kelas VII tahun 2019
3. Sebagai Penelaah Buku Matematika Kelas X, XI, XII tahun 2021

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S3: Pendidikan Matematika Universitas Negeri Surabaya tahun masuk 1999
2. S2: Pendidikan Matematika IKIP Malang tahun masuk 1992
3. S1: Pendidikan Matematika IKIP Malang tahun masuk 1977

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. *Titik Sugiarti, Dinawati Trapsilasiwi, Sunardi, Erfan Yudianto, . 2022. Kapita Seleкта: Relasi & Fungsi, Limit, Turunan, dan Integral. UNEJ Press. 978-623-6039-91-5*
2. *Sunardi, Erfan Yudianto, Harina Fitriyani, M.Pd.. 2020. Geometri Analitik: Tinjauan pada Bidang Datar. KHD Production. 978-623-94790-8-4*
3. *Erfan Yudianto, Sunardi, . 2014. Teori dan Soal-soal Geometri Analitika Bidang. Jember University Press. 978-602-9030-73-0*

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir)

1. Sunardi, Nurcholif Diah Sri Lestari, Dian Kurniati, Didik Sugeng Pambudi, 2023. The Mathematics Prospective Teachers Activities when Solving Mathematics Projects Outdoor Learning Mathematics Projects in the Campus Garden. *Mathematics Teaching Research Journal (MTRJ)*. 15(3). <http://siakad.unej.ac.id/commons.hostos.cuny.edu/mtrj/>

2. Sunardi, Erfan Yudianto, 2023. Ethnomathematics Exploration in Coffee Planting Activities at Durjo Jember Plantation. *International Journal of Current Science Research and Review*. 6(3). <https://ijcsrr.org/single-view/?id=9824&pid=9555>
3. Sunardi, Erfan Yudianto, Novi R. Aini, Hendra Tanu Wijaya. 2021. The Development of Tangram-Based Geometry Test to Measure the Creative Thinking Ability of Junior High School Students in Solving Two-Dimensional Figure Problems. *Journal of Physics*. 1836(012051). <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1836/1/012051>
4. Sunardi, Erfan Yudianto, M. P. Sari, N. I. Laily. 2020. The Effect of Problem Based Learning Model on Junior High School Students' Higher Order Thinking Skills. *Journal of Physics*. 1538(012079). <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1538/1/012079>

Nama Lengkap : Dr. Al Azhary Masta, M.Si.
E-mail : alazhari.masta@upi.edu
Instansi : Prodi Matematika FPMIPA UPI
Alamat Kantor : FPMIPA Universitas Pendidikan
Indonesia, Jl. Dr. Setiabudi No .229,
Isola, Kec. Sukasari, Kota Bandung,
Jawa Barat 40154
Bidang Keahlian : Matematika Analisis



Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 tahun Terakhir:

Dosen Program Studi S1 Program studi Matematika FPMIPA Universitas Pendidikan Indonesia (2015 – sekarang)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S3: Matematika, Institut Teknologi Bandung (2013 – 2018)
2. S2: Matematika, Institut Teknologi Bandung (2011 – 2013)
3. S1: Matematika, Universitas Pendidikan Indonesia (2007 – 2011)

Judul Buku yang Pernah Ditelaah/Editor (10 tahun terakhir)

1. Buku digital pusat perbukuan untuk Program kelas IV, V, VI (2019)
2. Buku Siswa dan Guru Matematika SMA/ MA/ SMK kelas X. Penerbit Pusat Perbukuan, Balitbang, Kemdikbud, tahun 2020
3. Buku Siswa dan Guru Matematika Sekolah Dasar Kelas 1. Penerbit Pusat Perbukuan, Balitbang, Kemdikbud, tahun 2022
4. Buku Siswa dan Guru Matematika Sekolah Dasar Kelas 2. Penerbit Pusat Perbukuan, Balitbang, Kemdikbud, tahun 2022

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir)

1. *Math Project (Pembelajaran Matematika Berbasis Pendekatan Saintifik) untuk kelas I SD, IV SD, VII SD.* Penerbit Yrama Widya Bandung pada tahun 2014.
2. *Buku Siswa dan Guru Matematika Peminatan SMA/ MA/ SMK kelas X.* Penerbit Pusat Perbukuan, Balitbang, Kemdikbud, tahun 2019
3. *Buku Siswa dan Guru Matematika Tingkat Lanjut SMA kelas XI.* Penerbit Pusat Perbukuan, Balitbang, Kemdikbud, tahun 2021

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

Hasil Penelitian selengkapnya dapat dilihat di laman

Id Scopus 57189662322
Id Google Scholar 5cxkPMUAAAJ
Id Sinta 6007709

Biodata Ilustrator

Nama Lengkap : Faris Majduddin Naufal, S.M
E-mail : farismnaufal@gmail.com
Alamat Kantor : Monoponik Studio. Jl. Otto Iskandar
Dinata No. 458, Bandung
Bidang Keahlian : Desain Grafis & Ilustrasi



Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Co Founder & Principal Designer, Monoponik Studio (2012-sekarang)
2. Marketing Staff (Internship), Mahanagari Nusantara (2012)
3. Visual Artist / Illustrator (2010-sekarang)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S1: Manajemen Bisnis, Telkom University (2009-2015)

Karya/Pameran/Eksibisi dan Tahun Pelaksanaan (10 tahun terakhir)

1. 111 Buya Hamka Exhibition, Universitas Al Azhar, Jakarta (2019)
2. All The Small Things, Qubicle, Jakarta (2017)
3. Seek A Seek Exhibition (with Monoponik), Dia.Lo.Gue, Jakarta (2016)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa Kelas 3 Tema 1,3-9 Subtema 3*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
2. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Pendamping Bagi Guru Kelas 3 Tema 1,3-9 Subtema 3*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
3. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 1,3-9 Subtema 3*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. "Pengaruh Word of Mouth Marketing Melalui Media Twitter @ FLAMEONfootmate Terhadap Keputusan Pembelian Konsumen Tahun 2014" (2015)

Biodata Penyunting Naskah 1

Nama Lengkap : Tri Hartini, S.S.
E-mail : trihartini2703@gmail.com
Alamat Kantor : -
Bidang Keahlian : Editing buku/naskah, proof read



Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

2001–sekarang: Editor Freelance

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

S-1: Fakultas Sastra Universitas Gadjah Mada Yogyakarta jurusan Sastra Indonesia spesialisasi bidang Linguistik, 1992–1998

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 tahun terakhir):

1. *Ideologi Fantasi dalam Sastra Indonesia*, Kanisius 2024
2. *Pancasila Jati Diri Bangsa Indonesia*, Kanisius 2023
3. *Pendidikan Pancasila SMP/MTs Kelas VII (Edisi Revisi)*, Pusbuk 2023
4. *Kumpulan Artikel Pendek Bank Indonesia*, Kanisius 2023
5. *Jujur Terhadap Pancasila*, Kanisius 2022
6. *Penulisan dan Penerbitan Artikel di Jurnal Internasional Bereputasi*, Kanisius 2022
7. *Menulis Esai Akademis, Buku Ajar Mata Kuliah Umum Bahasa Indonesia*, Kanisius 2022
8. *Matematika SD/MI Kelas VI*, Pusbuk 2022
9. *Buku Panduan Guru Matematika SD/MI Kelas VI*, Pusbuk 2022
10. *Matematika SMP/MTs Kelas VII*, Pusbuk 2022
11. *Buku Panduan Guru Matematika SMP/MTs Kelas VII*, Pusbuk 2022
12. *Analisis Model Kurikulum Operasional Satuan Pendidikan*, Pusbuk 2022
13. *Bahasa Indonesia SD/MI Kelas VI*, Pusbuk 2021
14. *Buku Panduan Guru Bahasa Indonesia SD/MI Kelas VI*, Pusbuk 2021
15. *Bahasa Indonesia SMP/MTs Kelas VII*, Pusbuk 2021

Biodata Penyunting Naskah 2

Nama Lengkap : Maharani Prananingrum, S.Si., M.A
E-mail : maharaniprananingrum@gmail.com
Instansi : Pusat Perbukuan Kemendikbudristek
Alamat Kantor : Kompleks Kemendikbudristek
(Gedung D) Jl. RS. Fatmawati, Cipete
Jakarta Selatan
Bidang Keahlian : Penyuntingan Naskah, Pengembang
Perbukuan



Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

2005 – sekarang: Pusat Perbukuan Kemdikbudristek

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S1: Matematika di Universitas Pendidikan Indonesia, 1998-2003
2. S2: Psikometrika Terapan di Fakultas Psikologi Universitas Gadjah Mada, 2016-2019

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 tahun terakhir):

1. Matematika untuk SD/MI Kelas III, Pusat Perbukuan 2022.
2. Buku Panduan Guru Matematika untuk SD/MI Kelas III, Pusat Perbukuan 2022.
3. Panduan Penyelenggaraan PAUD Berkualitas Seri 9 – Lingkungan Belajar Partisipatif, Direktorat Pendidikan Anak Usia Dini 2022.
4. Buku Panduan Guru Dasar-Dasar Nautika Kapal Niaga untuk SMK/MAK Kelas X, Pusat Perbukuan 2022.

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 tahun terakhir):

1. Kajian Pemanfaatan Buku Guru dalam Proses Pembelajaran untuk Jenjang Sekolah Dasar, Pusat Perbukuan 2021

Biodata Editor Visual

Nama Lengkap : Is Yuniarto
E-mail : isyuniarto@gmail.com
Instansi : Wind Rider Studio
Alamat Kantor : Surabaya
Bidang Keahlian : Komik, ilustrasi, desain.



Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Ilustrator dan komikus
2. General Manager Bumilangit Comic Media
3. Dosen honorer di Universitas Kristen Petra, Universitas Ciputra, iSTTS Surabaya.

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

S1 jurusan Desain Komunikasi Visual, Universitas Kristen Petra. 1999-2003

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 tahun terakhir):

1. Grand Legend Ramayana vol 7 – Reon Comics, 2023
2. Grand Legend Ramayana vol 6 – Reon Comics, 2022
3. Grand Legend Ramayana vol 5 – Reon Comics, 2020
4. Gundala Son of Lightning – Line Webtoon2., 2019
5. Garudayana Saga format scroll – Ciayo Comics, 2018
6. Grand Legend Ramayana Japan edition – Digital Catapult, 2016
7. Garudayana Saga Japan edition – Digital Catapult, 2015
8. Garudayana Saga vol 4-6 – CAB Publishing, 2015
9. Garudayana Saga vol 1-3 – CAB Publishing, 2014
10. Grand Legend Ramayana – Reon Comics, 2013

Biodata Penata Letak (Desainer)

Nama Lengkap : M. Firdaus Jubaedi
E-mail : muhafir@gmail.com
Alamat Kantor : -
Bidang Keahlian : Desain Grafis



Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Koordinator tim pengolah naskah Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh (2020-2021)
2. Staf pada Pusat Analisis dan Sinkronisasi Kebijakan (PASKA) Kemendikbud (2019-2020)
3. Staf pada Staf Ahli Mendikbud bidang pembangunan karakter (2018-2019)
4. *Audio Visual Designer* di Cita Rasa Prima Indonesia Berjaya (2016-2018)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S1: Desain Komunikasi Visual, Institut Teknologi Nasional Bandung (2011-2016)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa Kelas 1 Tema 1-9 Subtema 1*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
2. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Pendamping Bagi Guru Kelas 1 Tema 1-9 Subtema 1*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
3. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 1 Tema 1-9 Subtema 1*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.